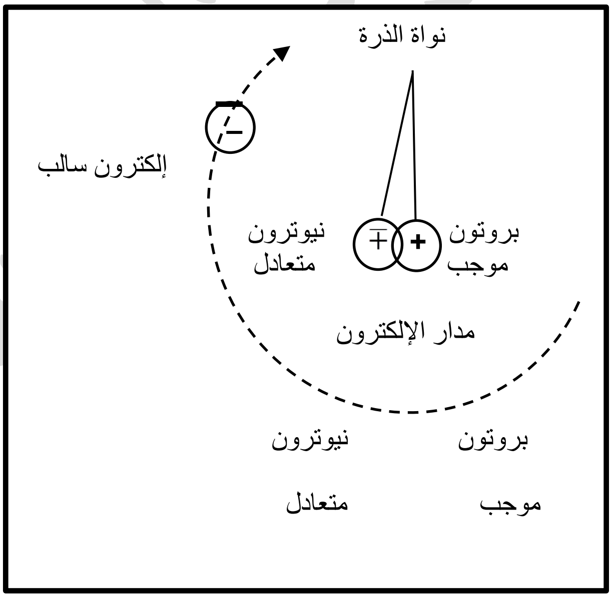
الفصل الاول // قانون كولوم
Ch.1 // Coulomb's Law

1-1 تركيب الذرة Atomic Structure

تتكون كل ذرة من نواة موجبة الشحنة تمثل جزءاً صغيراً جداً من حجمها ولكن تؤلف أكثر من 99.9% من كتلتها الكلية. تحتوي النواة على نوعين من الجسيمات المشحونة المتناهية الصغر تسمى بالنيوترونات والبروتونات. فالنيوترون متعادل الشحنة وكتلته $1.6748\times10^{-27}\,kg$، أما البروتون فهو ببساطة نواة ذرة الهيدروجين وشحنته $+e$ تساوي $1.602\times10^{-19}\,C$ وكتلته $1.6725\times10^{-27}\,kg$.وتدور حول النواة بمدارات خارجية (دائرية أو على شكل قطع ناقص) يتراوح بعدها ما بين ١ و ٢ انجستروم جسيمات متناهية جداً في الصغر تسمى بالالكترونات وهي ذات كتلة صغيرة جداً مقارنة بكتلة النواة مقدارها $9.1091\times10^{-31}\,kg$ وتحمل شحنة سالبة $-e$ مساوية بالمقدار لشحنة البروتونات الموجبة* كما موضح في الشكل (١-١).



الشكل (١-١) : رسم تخطيطي لتركيب الذرة.

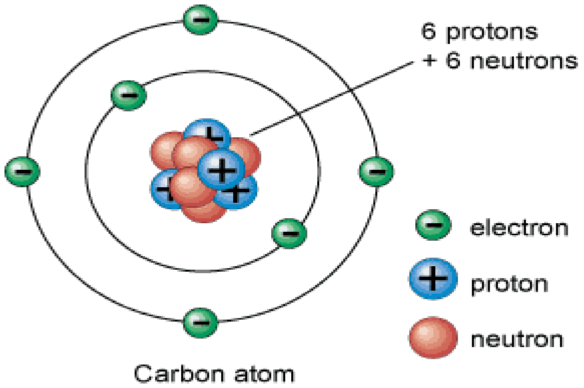
أن عدد الالكترونات التي تدور حول النواة هي التي تميز ذرة عنصر عن ذرة عنصر آخر. وكذلك نجد من خلال قيم كتل الجسيمات الأولية أن للبروتون كتلة تقريباً مساوية لكتلة النيوترون، وان كتلة الإلكترون الساكن هي اصغر بحوالي ١٨٤٠ مرة من كتلة البروتون لذا فان كتلة الذرة تتركز في نواتها.

فإذا تصورنا نواة الذرة بشكل كرة فان قطرها يتراوح مابين $1\times10^{-15}m$ للهيدروجين إلى حوالي $7\times10^{-15}m$ للذرات الثقيلة التي تحتوي نواتها على عدد كبير من البروتونات كاليورانيوم مثلاً، أما قطر الذرة فيتراوح مابين $1\times10^{-10}m$ إلى حوالي $3\times10^{-10}m$ أي اكبر بحوالي 10^5 مرة قطر النواة.

أن الذرة متعادلة كهربائياً (غير متأينة) عندما يكون عدد الالكترونات فيها مساوياً لعدد البروتونات تماماً كحالة ذرة الكربون الموضحة في الشكل (١-٢) حيث تتوازن الشحنات السالبة لإلكتروناتها الست بالشحنة الموجبة للنواة، وهذا العدد المتوازن يسمى بالعدد الذري Atomic Number ويرمز له بالحرف Z. أما العدد الكلي للبروتونات والنيوترونات داخل النواة فيسمى بالعدد الكتلي Mass Number ويرمز له بالحرف A وبهذا يكون:

$$A = Z + N \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1-1)$$

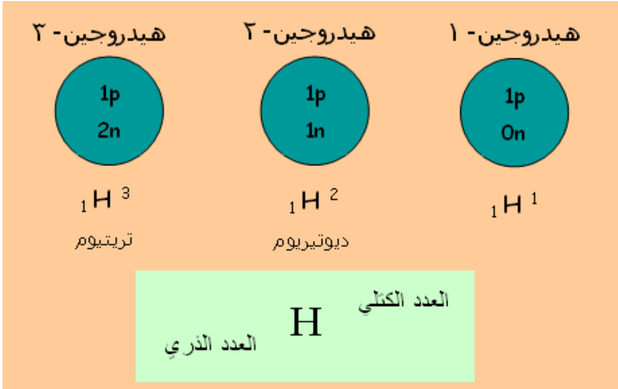
إذ أن الحرف N يرمز إلى عدد النيوترونات داخل النواة.

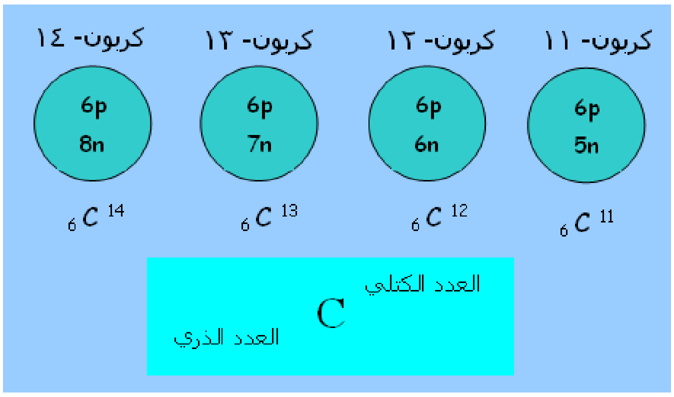


الشكل (١-٢) : تركيب ذرة الكربون.

إن ذرات العناصر التي تختلف في عددها الكتلي A وتتشابه في عددها الذري Z تسمى بالنظائر Isotopes. ومن الواضح أن هذه النظائر تتواجد فقط في المادة الواحدة حيث تختلف في عدد النيوترونات الموجودة في نوياتها. وتتشابه النظائر في خواصها الكيمياوية نظراً لاعتمادها على عدد الالكترونات وتوزيعها خارج النواة، على حين تختلف في بعض خواصها الفيزياوية نتيجة اختلاف كتلها بسبب اختلاف

عدد نيوترونات نظائر العنصر الواحد كما ي ذرة الهيدروجين الموضحة بالشكل(١-٣) وذرة الكاربون الموضحة بالشكل(١-٤).





الشكل (١-٣) : نظائر ذرة الهيدروجين **نظائر ذرة الكاربون**

2-1 الموصلات والعوازل واشباه الموصلات
Conductors ,Insulators Semiconductors

بالإمكان تقسيم المواد تبعاً لسلوكها الكهربائي إلى مجموعتين رئيستين هما الموصلات والعوازل. وحيث المواد التي تقع في الوسط ما بين هاتين المجموعتين فأنها تسمى أشباه الموصلات Semiconductors. يمكن تقسيم طيف لبعض العناصر حسب قيم معاملات توصيلها الكهربائي σ، إذ نجد :

١- مجموعة الفلزات مثل الفضة والنحاس والحديد ، حيث توصيلتها الكهربائية σ عالية عند درجة حرارة الغرفة في المدى من 10^5 إلى 10^8 (اوم.متر)$^{-1}$.

٢- مجموعة أشباه الموصلات مثل الجرمانيوم والسليكون وكبريتيد الرصاص وكبريتيد الكادميوم، حيث قيم σ متوسطة عند درجة حرارة الغرفة في المدى من 5×10^5 إلى 5×10^{-5} (اوم.متر)$^{-1}$.

٣- مجموعة العوازل مثل الزجاج والخزف والكوارتز والكهرمان،حيث قيم σ قليلة جداً عند درجة حرارة الغرفة في المدى من 10^{-6} إلى 10^{-16} (اوم.متر)$^{-1}$.

(١) الموصلات (Conductors)

و هي المواد التي تسمح للشحنات بالحركة خلالها، و ذلك تحت تأثير قوة خارجية. و من الأمثلة عليها: جميع المعادن (كالنحاس، و الحديد و الذهب ...)، و جميع محاليل الأملاح (كمحلول كبريتات النحاس ...).

(٢) العوازل (Insulators)

و هي المواد التي لا تسمح، عندما تكون نقية، للشحنات بالحركة خلالها، ومن الأمثلة عليها، الزجاج و المطاط و الخشب.

(٣) اشباه الموصلات (Semiconductors):

و هي المواد المتوسطة، بين العوازل و الموصلات، في سماحيتها للشحنات بالحركة من خلالها. و من الأمثلة عليها : السيليكون و الجرمانيوم. و يمكن إضافة بعض الشوائب كالبورون أو الفوسفور إلى شبه الموصلات لزيادة توصيلها.

3-1 الشحنة الكهربائية Electric Charge

لم تعرف الشحنة الاساسية الآ بعد ان أكتشف مكونات الذرة. فالذرة تتكون من النواة، والتي تحتوي على بروتونات وهي موجبة الشحنة، ونيوترونات وهي متعادلة الشحنة، ويدور حول النواة جسيمات سالبة الشحنة ويساوي عددها عدد البروتونات وهي الالكترونات.

وقد اعتبرت شحنة الالكترون (e-) هي الشحنة الاساسية. ووحدة الشحنات في النظام العالمي للوحدات هي الكولوم (Coulomb)، والذي يرمز له بالرمز (C)، ومقدار شحنة الالكترون (-1.6×10^{-19} C).

الجسيم	Particle	Symbol الرمز	Charg الشحنة	Mass الكتلة
البروتون	Proton	P	$1.6\times10^{-19}C$	$1.67\times10^{-27}Kg$
النيوترون	Neutron	N	0	$1.67\times10^{-27}Kg$
الالكترون	Electron	e	$-1.6\times10^{-19}C$	$9.11\times10^{-31}Kg$

الجدول (1-1) يوضح كتلة وشحنة كل من الالكترون والبروتون والنيوترون.

وقد أثبتت التجارب التي اجراها فراداي (Faraday) بالتحليل الكهربائي سنه (1831) ان الشحنة مقدار مكمَى (Quantized)، وفي سنة (1879) أكتشف ثومسون (Thomson) الالكترون، وفي سنة (1909) قاس ميليكان (Millikan) الشحنة التي يحملها الالكترون وذلك بأجراء تجربتة الشهيرة عل قطرة الزيت، واثبت فيها بما لا يدعو للشك بأن الشحنة الكهربائية كمية مكماة، أي ان الشحنة الكهربائية التي تكون على أي جسم لا بد وان تساوي عدداً صحيحا من شحنة الالكترون، أي:

$$q = N e \qquad N=0, 1, 2, 3, \ldots \quad (1\text{-}2)$$

<u>مثال (1):</u> أوجد عدد الالكترونات المفقودة نتيجة وجود شحنة كهربائية موجبة على قطعة معينة مقدارها $(1.44 \times 10^{-8}\ C)$

الحل:

$q = N e$

$1.44 \times 10^{-8}\ C = N (1.6 \times 10^{-19} C$

$N = 9 \times 10^{-10}$

1-4 قانون كولوم Coulomb's Law

يعد العالم الفرنسي تشارلس أوغسطين دي كولوم (١٧٣٦-١٨٠٦) واحداً من الرواد الأوائل في القرن الثامن عشر في الكهربائية، فهو أول من قام بقياسات عملية للقوى العاملة بين الأجسام المشحونة. ومن حصيلة هذه القياسات استطاع صياغة قانونه الشهير عام ١٧٨٥ الذي عرف بقانون كولوم وهو يرتكز على ثلاث نصوص :

١- تنافر **الشحنات** ذات الإشارة المتشابه وتجاذب الشحنات ذات الإشارة المختلفة.
٢- تؤثر شحنتان نقطيتان أحداهما على الأخرى بقوة تعمل على امتداد الخط المستقيم الذي يصل بين مركزيهما، ومقدار هذه القوة سواء كانت قوة تجاذب أو تنافر بين الشحنتين تتناسب طردياً مع حاصل ضرب الشحنتين.
٣- يتناسب مقدار قوة التجاذب أو التنافر بين شحنتين عكسياً مع مربع المسافة بينهما، ان هذا الاستنتاج يعد إشارة واضحة إلى ان كولوم اثبت ان قوة التجاذب أو التنافر بين جسمين مشحونين تتبع قانون التربيع العكسي.

على ضوء ما تقدم يمكن صياغة نص قانون كولوم بالشكل الأتي : **القوة الكهروستاتيكية بين شحنتين نقطيتين في حالة سكون تتناسب طردياً مع حاصل ضرب مقدار الشحنتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما.**

ورياضيا يكتب القانون:

$$F \propto q_1 q_2$$

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

حيث K مقدار ثابت يعتمد على نوع الوسط المحيط بالشحنتين و يساوي في حالة الفراغ 9×10^9 $N.m^2/C^2$. و يكتب الثابت K في كثير من الأحيان على النحو التالي:

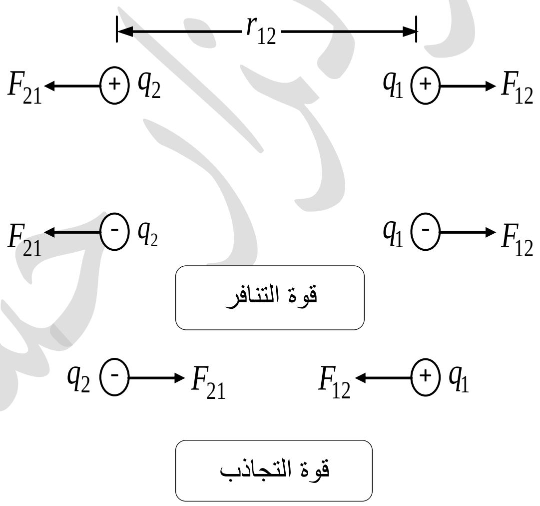
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^{9}\ \mathrm{N.m^2/C^2}$$

تمثل (ε_0) السماحية الكهربائية وهي مدى سماحية الوسط بمرور خطوط المجال الكهربائي من خلاله وقيمتها في الفراغ.

و تساوي $8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N.m^2}$. وعند وجود وسط آخر غير الفراغ بين الشحنتين، يستعاض عن ε_0 بثابت نفاذية ذلك الوسط للتأثير الكهربائي.

باستخدام النظام العالمي للوحدات (SI system of units) فإن القوة تقاس بالنيوتن (N)، و المسافة (r_{12}) بالمتر، و الشحنة بالكولوم. وعندما تكون الشحنتين متشابهتين (موجبة-موجبة أو سالبة – سالبة) تكون القوة بينهما قوى تنافر . وإذا كانت الشحنتين مختلفتين (موجبة – سالبة) تكون القوة بينهما قوى تجاذب.

ملحوظة: بما ان القوة الكهربية كمية متجهه فأنها تحدد تحديدا تاما بمقدارها واتجاهها فالمقدار يحدد بالعلاقة السابقة، أما الاتجاه فيكون دائما على الخط الواصل بين الشحنات على حسب قوى التنافر او التجاذب كما هو موضح بالشكل التالي :-



ملحوظة

قانون كولوم ينطبق على الشحنات النقطية (point charges) فقط، (تعرف الشحنة النقطية بأنها تلك الشحنة التي يمكن إهمال أبعادها (أو حجمها) إذا قورنت بالمسافة بينها و بين شحنات أخرى) و أن القوة التي تؤثر بها الشحنة q_2 على الشحنة q_1، F_{12} (أو القوة التي تؤثر بها الشحنة q_1 على الشحنة q_2، F_{21}) كمية متجهة (أي أن لها مقداراً و اتجاهاً).

أما إذا كان هناك مجموعة من الشحنات النقطية (q_1, q_2, q_3, q_4) يؤثر بعضها على بعض، فإن القوة الكلية التي تؤثر على إحداها (الشحنة رقم ١ مثلاً) تعطى بجمع متجهات القوى بين الشحنة هذه و كل من الشحنات الأخرى. أي أن:

$$\vec{F_1} = \vec{F_{12}} + \vec{F_{13}} + \vec{F_{14}}$$

5-1 أنظمة قياس الشحنة الكهربائية
Systematic Measurement Electric Charge

إن أول نظام للوحدات كانت توضع على أساسه معادلات الكهروستاتيك هو نظام الوحدات الكهروستاتيكي (e.s.u.)، وحسب هذا النظام اختيرت وحدة الشحنة وفقاً لقانون كولوم الذي تعتبر فيه k تساوي واحداً في حالة وجود الشحنات في الفراغ، وأطلق عليها اسم ستات كولوم Statcoulomb. فالستات كولوم تعرف بأنها تلك الشحنة التي إذا وضعت في الفراغ على بعد ١سم من شحنة أخرى مماثلة لها في النوع ومساوية لها في المقدار لتنافرت معها بقوة داين واحد. إن القوة وفقاً لهذا التعريف كان قد عّبر عنها بالداين والمسافة بالسنتيمتر، غير إن المعادلات المتعلقة بظاهرة المغناطيسية كانت توضع على أسس نظام آخر نشأ مع تطور المغناطيسية دعيّ بنظام الوحدات الكهرومغناطيسية (e.m.u.) واستعملت على أساسه وحدة للشحنة وهي وحدة الكهرومغناطيسية.

إن وحدات هذين النظامين سالفى الذكر ليست متساوية لنفس الكمية، أضف إلى ذلك فان مجموعة من الوحدات الكهربائية التي استعملت في القياسات العملية كالفولت والأمبير والاوم والهنري والفاراد تختلف في قيمتها عن تلك في النظامين المذكورين مما دعيّ إلى نشؤ نظام جديد للوحدات سميَّ بالنظام العملي.

إن هذا الإرباك في تعدد أنظمة الوحدات أدى إلى التفكير باستحداث نظام آخر جديد، وضع أسسه الإيطالي جورجي Giorgio في بداية القرن التاسع عشر سميَّ بنظام متر-كيلوغرام-ثانية-أمبير ورمزه (MKSA) تبنته أقطار عديدة في العالم عام ١٩٣٥. وأخيرا جاء النظام الدولي للوحدات SI System International وهو النظام الأمثل للوحدات وشمل ست وحدات أساسية وهي المتر (وحدة أساسية للأطوال) والكيلوغرام (وحدة للكتلة) والثانية (وحدة للزمن) والأمبير (وحدة لقياس التيار) ودرجة الحرارة المطلقة - كلفن- (وحدة لدرجة الحرارة) والكاندلا (وحدة قياس الشمعة).

وفقاً للنظام الدولي SI تقاس القوة بالنيوتن والمسافة بالأمتار، أما وحدة كمية الشحنة فلا تعرَّف بدلالة قانون كولوم بل بدلالة وحدة التيار (الأمبير) وتسمى الكولوم C، وتعرف بأنها كمية الشحنة المارة خلال مقطع عرضي لسلك في ثانية واحدة إذا مرَّ تيار ثابت مقداره واحد أمبير في هذا السلك. ولكون الكولوم كمية كبيرة نسبياً من الشحنة $1\,coulomb = 2.99592\times10^{9}\,statcoulomb$ ، تستعمل وحدات اصغر منه وأكثر ملائمة هي الملي كولوم وميلي كولوم mC واحد يساوي 10^{-3} كولوم، أو المايكرو كولوم μC ويساوي 10^{-6} من الكولوم.

في حالة وجود عدد من الشحنات النقطية $q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots$ والمطلوب حساب القوة التي تؤثر على الشحنة q_1 مثلاً، فإننا نستعمل العلاقة الاتجاهية الآتية:

$$\vec{F}_{1x} = \vec{F}_{12x} + \vec{F}_{13x} + \vec{F}_{14x} + \ldots\ldots$$
$$\vec{F}_{1y} = \vec{F}_{12y} + \vec{F}_{13y} + \vec{F}_{14y} + \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots()$$

ومنها يحسب مقدار واتجاه القوة كالآتي :

$$F = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} \qquad , \quad \tan\theta = \frac{F_{1y}}{F_{1x}}$$

6-1 توزيع الشحنة المتصلة

هناك حالات تكون فيها الشحنة موزعة على طول خط مستقيم او على سطح اوعلى حجم ، يكون من الملائم ان تعرف كثافة الشحنة الموزعة وفق الحالات الاتية :-

١- اذا كانت الشحنة q موزعة بشكل منتظم على طول خط مستقيم L فان كثافة الشحنة الطولية λ تعرف كالاتي :

$$\lambda = q / L \quad (C/m)$$

٢- اذا كانت الشحنة q موزعة بشكل منتظم على سطح مساحه S فان كثافة الشحنة السطحية σ تعرف كالاتي :

$$\sigma = q / S \quad (C/m^2)$$

٣- اذا كانت الشحنة q موزعة بشكل منتظم خلال حجم V فان كثافة الشحنة الحجمية ρ تعرف كالاتي :

$$\rho = q / V \qquad (C/m^3)$$

٤- اذا كانت الشحنة موزعة بشكل غير منتظم على طول اوسطح او حجم فيجب ان نعبر عن كثافات الشحنات كالاتي :

$$\lambda=\frac{dq}{dL} \qquad \sigma=\frac{dq}{dS} \qquad \rho=\frac{dq}{dV}$$

اذ dq هي عنصر الشحنة على امتداد عنصر الطول او السطح او الحجم .

<u>مثال (2)//</u> أحسب القوة الكهروستاتيكية بين الشحنتين (q_1=-9μC) و (q_2=+6μC) اذا كانتا موضوعتين في الفراغ والمسافة بينهما (30cm) ثم بين نوعها؟

q_1=-9μC = -9×10^{-6} C

q_2=+6μC = $+6\times10^{-6}$ C

r=30cm = 30×10^{-2} m

$$\boldsymbol{F = k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}}$$

$$\boldsymbol{F = \frac{9\times10^{9}\times(-9\times10^{-6})\times(6\times10^{-6})}{(3\times10^{-2})^2}}$$

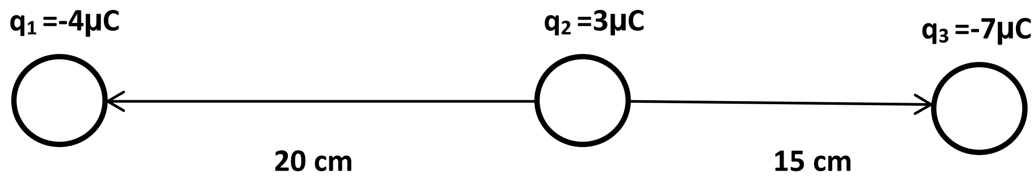
$$\boldsymbol{F = \frac{9\times(-9)\times(6)}{9}\times\frac{10^{9}\times10^{-6}\times10^{-6}}{10^{-4}}}$$

$$\boldsymbol{F} = -54\times10^{-1}\ (N)$$

*بما ان القوة سالبة اذا هي قوة تجاذب. * بما ان الشحنتان مختلفتين بالاشارة اذا قوة تجاذب.

....

<u>مثال (3)//</u> الشكل ادناه ثلاث شحنات أحسب مقدار واتجاه القوة المؤثرة على الشحنة الثانية اذا كانت الابعاد 15&20cm بالترتيب



$$F_{12} = k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}$$

$$F_{12} = \frac{9\times10^{9}\ \times(-4\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{(20\times10^{-2})^2} = -27\times10^{-1}\,(N)$$

$$F_{23} = k\,\frac{q_3\,q_2}{r^2}$$

$$F_{23} = \frac{9\times10^{9}\ \times(-7\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{(15\times10^{-2})^2} = -84\times10^{-1}\,(N)$$

<u>مثال (4)//</u> جد النسبة بين الوة الكهروستاتيكية F_e وقوة الجاذبية Fg بين الكترونين وضعا في الفراغ علما ان $G=6.67\times10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

$$\frac{F_e}{F_G} = k\frac{q^2}{r^2} \div \frac{Gm^2}{r^2}$$

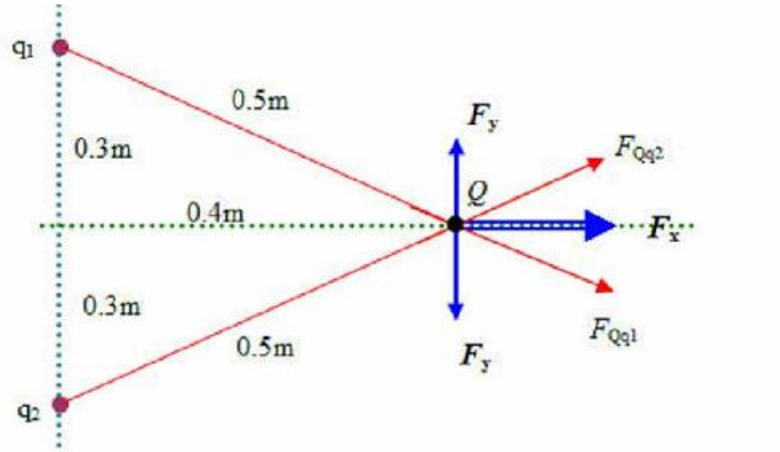
$$\frac{F_e}{F_G} = k\frac{q^2}{r^2} \times \frac{r^2}{Gm^2}$$

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{9\times10^{9}\ \times(1.6\times10^{-19})^9}{6.67\times10^{-11}\times(9.11\times10^{-31})^2} = 41\times10^{41}$$

اي ان القوة الكهروستاتيكية أكبر من قوة الجاذبية الارضية بالنسبة الموضحة في الاجابة أعلاه والعدد (41×10^{41}) يسمى عدد ديراك السحري والذي لاحظ ايضا ان نسبة عمر الكون الى أصغر زمن في الكون = هذه العدد.

نسبة قطر الكون الى قطر الالكترون = هذا العدد ولهذه الاسباب يسمى بالعدد السحري.

مثال (5)// في الشكل، شحنتان موجبتان متماثلتان ($q=2\times10^{-6}$) تتفاعل مع شحنة ثالثة قيمتها ($Q=4\times10^{-6}$) أوجد محصلة القوة المؤثرة على الشحنة Q



لأيجاد محصلة القوى الكهربائية المؤثرة على الشحنة Q نطبق قانون كولوم لحساب مقدار القوة التي تؤثر بها كل شحنة على الشحنة Q. وبما أن الشحنتين متساويتان وتبعدان نفس المسافة عن الشحنة Q فأن القوتين متساويتان في المقدار وقيمة القوة

$$\boldsymbol{F_{Qq1} = k\,\frac{q\,Q}{r^2}}$$

$$F_{Qq1} = \frac{9\times10^{9}\ \times(4\times10^{-6})\times(2\times10^{-6})}{(0.5)^2} = 0.29\ (N)$$

$$F_{Qq1} = F_{Qq2}$$

بتحليل متجه القوة الى مركبتين ينتج:

$$F_x = F\,cos\theta = 0.29\left(\frac{0.4}{0.5}\right) = 0.23\ N$$

$$F_y = -F\,sin\theta = -0.29\left(\frac{0.3}{0.5}\right) = -0.17\ N$$

وبالمثل يمكن ايجاد القوة المتبادلة بين الشحنتين Q و q_2 وهي F_{Qq} وبالتحليل الاتجاهي نلاحظ ان مركبتي y متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الاتجاه:

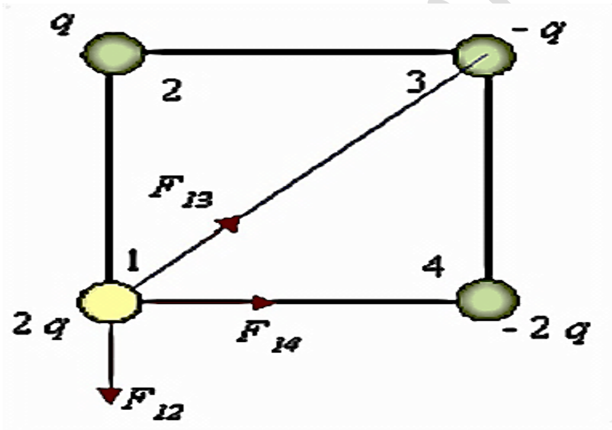
$$\sum F_x = 2 \times 0.23 = 0.46\ N$$

$$\sum F_x = 0$$

وبهذا فأن مقدار القوة المحصلة هي (0.46 N) واتجاهها في اتجاه محور X الموجب.

مثال (6)// في الشكل جد محصلة القوة المؤثرة في الشحنة في اسفل يسار المربع، اذا علمت ان

a=5cm و (q=1×10^{-7}



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

$$F_{12} = k\ \frac{2q\ \ q}{a^2}$$

$$F_{12} = \frac{9 \times 10^9\ \times 2(1 \times 10^{-7}) \times (1 \times 10^{-7})}{(5 \times 10^{-2})^2} = 0.072\ (N)$$

$$F_{13} = k\ \frac{2q\ \ q}{a^2}$$

$$F_{13} = \frac{9 \times 10^9\ \times 2(1 \times 10^{-7}) \times (1 \times 10^{-7})}{(7.07 \times 10^{-2})^2} = 0.036\ (N)$$

$$F_{14} = k\ \frac{2q\ \ 2q}{a^2}$$

$$F_{14} = \frac{9 \times 10^9\ \times 2(1 \times 10^{-7}) \times 2(1 \times 10^{-7})}{(5 \times 10^{-2})^2}\ =\ 0.144\ (N)$$

نلاحظ هنا اننا لا نستطيع جمع القوى الثلاث مباشرة لان خط عمل القوى مختلف، ولذلك لحساب المحصلة نفرض محورين متعامدين x وy ونحلل القوى التي لا تقع على هذين المحورين اي متجه القوة F_{13} ليصبح:

$$F_{13x} = F_{13}\ sin45 = 0.025\ N$$

$$F_{13y} = F_{13}\ cos45 = 0.025\ N$$

$$F_x = F_{13x} + F_{14} = 0.025 + 0.144 = 0.169\ N$$

$$F_y = F_{13y} + F_{12} = 0.025 - 0.072 = -0.047\ N$$

الاشارة السالبة تدل على ان اتجاه مركبة القوة في اتجاه محور y السالب.

محصلة القوة

$$F_1 = \sqrt{(F_x)^2 + \left(F_y\right)^2}$$

$$F_1 = \sqrt{(0.169)^2 + (-0.047)^2}\ = 0.175\ N$$

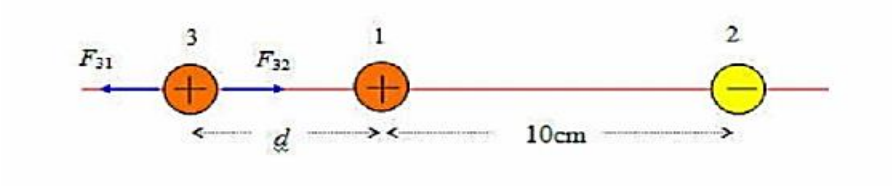
متجه القوة مع محول X

$$\theta = tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} = \frac{-0.047}{0.169} = \quad -15.5^o$$

مثال (7)// شحنتان ثابتتان مقدار كل منهما () وتفصل بينهما مسافة (10cm) . أين يمكن وضع شحنة ثالثة بحيث تكون محصلة القوى الكهربائية المؤثرة عليها تساوي صفراً ؟ أي تكون في وضع الاتزان.

الحل//

نلاحظ ان نوع الشحنة ومقدارها لا يؤثر في تعيين نقطة الاتزان، حيث يتحقق هذا فأنه يجب ان تكون القوى المؤثرة متساوية في المقدار ومتعاكسة في الاتجاه، وحتى يتحقق هذا الشرط فأن الشحنة الثالثة يجب ان توضع خارج الشحنتين وبالقرب من الشحنة الاصغر. لذلك نفرض شحنة موجبة q3 كما في الرسم ونحدد اتجاه القوى المؤثرة عليها



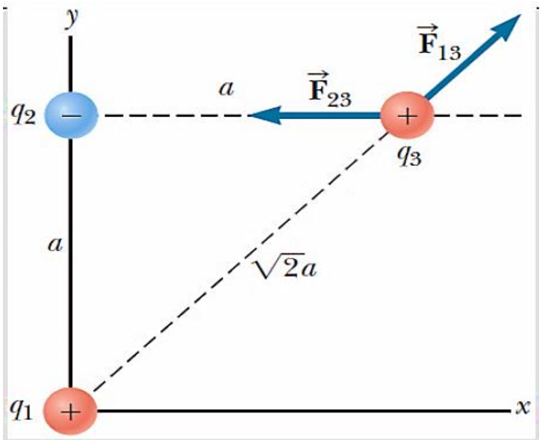
$$F_{31} = F_{32}$$

$$k\,\frac{q_3\,q_1}{r_{31}^2} = k\,\frac{q_3 q_2}{r_{32}^2}$$

$$\frac{1\times 10^{-6}}{d^2} = \frac{3\times 10^{-6}}{(d+10)^2}$$

حل هذه المعادلة وجد قيمة d؟

مثال (8)// أعتبر ان هناك ثلاث شحنات موضوعة على اركان مثلث قائم الزاوية كما هو موضح في الشكل، حيث ان الشحنة (q_1=q_3=5 μC) والشحنة (q_2=-2 μC) والمسافة (a=0.1m). أوجد القوة المؤثرة على q_3 .



$$\boldsymbol{F_{23} = k\,\frac{q_2\,q_3}{r^2}}$$

$$F_{12} = \frac{9\times10^9\ \times(-2\times10^{-6})\times(5\times10^{-6})}{(0.1)^2} = -8.99\ (N)$$

$$\boldsymbol{F_{13} = k\,\frac{q_1\,q_3}{r^2}}$$

$$F_{12} = \frac{9\times10^9\ \times(5\times10^{-6})\times(3\times10^{-6})}{2(0.1)^2} = 11.2\ (N)$$

الان سنقوم بأيجاد مركبات القوة $\vec{F}_{13}$ بالنسبة لمحور X و Y :

$$F_{13x} = F_{13}\,cos45 = 7.9\ N$$

$$F_{13y} = F_{13}\,cos45 = 7.94\ N$$

اوجد مركبات القوة المحصلة المؤثرة على الشحنة q_3:

$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23x} = 7.94 + (-8.99) = -1.04N$$

$$F_{3y} = F_{13y} + F_{23y} = 7.94 + 0 = 7.94N$$

وبالتعبير عن القوة المحصلة المؤثرة على الشحنة q_3 باستخدام متجهات الوحدة :

$$\vec{F}_3 = (-1.04\,\hat{\imath} + 7.94\hat{\jmath})N$$

H.W

1) أوجد قوة التنافر بين البروتونين اذا كانت المسافة بينهما (1mm) وقارنها بقوة الجاذبية بينهما؟

2) ثلاث شحنات مقدارها ($-5\mu C, 10\mu C, -10\mu C$) موضوعة في خط مستقيم على الترتيب أحسب مقدار واتجاه القوة المؤثرة على الشحنة الثانية الواقعة في منتصف المسافة بين الشحنتين اذا كانت المسافة بين الشحنتين الاولى (200cm)

3) وضعت ثلاث شحنات كهربائية قيمتها ($8\mu C, 4\mu C, 2\mu C$) على رؤوس مثلث قائم الزاوية ضلعية غير الوتر (3&4 cm) جد القوة التي تؤثر بها كل من القوة على بعضها

4) تصور ان دقيقتي الفا تواجدتا على بعد قدره (10^{-13} m) ما مقدار القوة التي تؤثرها بها احدى الدقيقتي على الاخرى ؟ علما ان الدقيقة تتكون من بروتونين ونيوترونين .

5) وضعت شحنتان نقطيتان ($q_1=2\ \mu C$) و ($q_2=4\ \mu C$) بحيث كانت المسافة بينهما (1m). اوجد اين توضع شحنة ($\bar{q}$) مقدارها (1µC) على الخط الواصل بينهما حتى تكون محصلة القوتين عليهما صفرا.

الفصل الثاني // المجال الكهربائي
Ch.2 //The Electric Field

تؤثر شحنة كهربائية على أخرى دون ان يكون هناك تماس بين الشحنتين، أي ان التأثير يكون عن بعد. فكيف تتأثر الشحنة الكهربائية الاخرى بوجود الأولى وكيف تؤثر عليها ؟. ان قانون كولوم يعطينا فقط النتيجة النهائية لهذا التأثير لا غير، أي محصلة القوة بين هاتين الشحنتين اذا علمت المسافة بينهما. ولكننا نستطيع ان نتخيل هذا التأثير عن بعد اذا تخيلنا ان تضاريس الفضاء الفيزيائية قد تغيرت نتيجة وجود شحنة كهربائية فيه. ويتجلى هذا التغيير في وجود توتر مصدره الشحنة الكهربائية يحدث نتيجة ما يسمى بالمجال الكهربائي، وعند توضع شحنة أخرى عند أي نقطة في الفضاء فأنها تتأثر بالمجال الكهربائي الناتج عن الشحنة الاولى وتتأثر بقوة تجاذب وتنافر نحوها.

1-2 شدة المجال الكهربائي Electric Field Intensity

كان فراداي أول من افترض فكرة المجال والتي كانت فكرة غريبة للعلماء الذين سبقوه بما فيهم نيوتن الذي لم يكن مقتنعا بفكرة التأثير عن بعد عندما ناقش قوة الجذب بين الكتل. وحسب افتراض فراداي فان المجال في حالة الكهرباء ينبعث من الشحنة الكهربائية في جميع الاتجاهات، ولقياسه نضع شحنة اختبارية (Test Charge) عند نقطه معينه في المجال ونحسب القوة المؤثرة عليها. وقد اختيرت شحنة الاختبار لتكون شحنة موجبة صغيرة جدا حتى لا تغير المجال الكهربائي المراد قياسه.

فاذا وضعت شحنة اختبار مقدارها (q_o) في مجال كهربائي ناتج عن وجود شحنة مقدارها (q)، فأن المجال الكهربائي (E) عند أي نقطه في الفضاء يعترف على انه القوة (F) مقسوما على الشحنة (q_o)، أي انه:

$$\boldsymbol{E = \frac{F}{q_o}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

وبتطبيق قانون كولوم القوة بين الشحنتين :

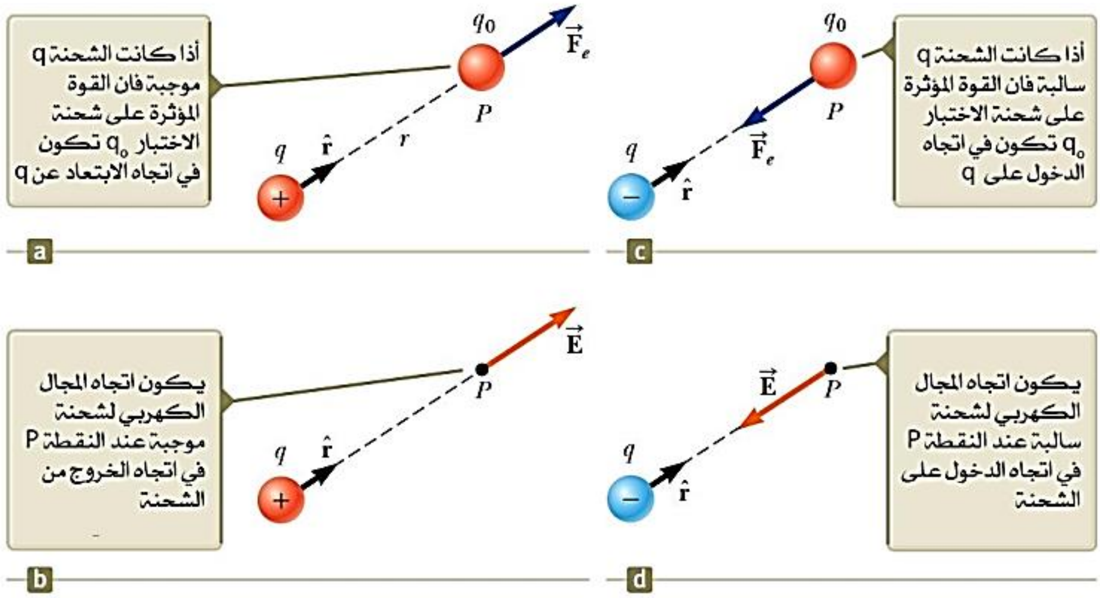
$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$E = K\frac{q}{r^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

واذا كانت موضوعه في الفراغ فأن:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

والمجـال الكهربـائي (E) كميـة فزيائيـة متجهـة، حيـث ان (F) كميـة فيزيائيـة متجهـة، و (q_o) كميـة فيزيائية قياسية غير متجهة، واتجاه (E) هو اتجاه (F)، وهو الاتجاه الذي كانت ستحرك فيه الشحنة (q_o) لو كانت حرة الحركة، ومن الواضح ان وحدات المجال الكهربائي هي وحدات قوة مقسومة على وحدات شحنة أي (N/C).



شكل (2-1): تمثيل اتجاه المجال الكهربائي.

نلاحظ من معادلة (3) ان المجال E لا يعتمد على مقدار شحنة الاختبار q_o ، وانما يعتمد على شحنة q (مصدر المجال) وعلى مسافة r (التي تحدد مكان النقطة المراد حساب المجال عندها). ولو كان هناك عدد من الشحنات النقطية المعزولة q_1, q_2, q_3 .... الخ، تقع على أبعاد r_1, r_2, r_3 .... الخ على التوالي من شحنة اختبارية q_o موضوعة عند النقطة P كما مبين في الشكل ادناه، يمكن استعمال قانون كولوم لحساب القوى لمجموعة من شحنات النقطية في تلك النقطة، أي حساب شدة المجال الناشىء عند كل شحنة نقطية على حده كما لو كانت هي الشحنة الوحيدة الموجودة، ثم جمع الاسهامات المنفردة نحصل على:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_o}{r_1^2}, \qquad F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2 q_o}{r_2^2}\ , \qquad F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_3 q_o}{r_3^2}$$

$$\therefore F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = \sum\nolimits_i F$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_o}{r_1^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2 q_o}{r_2^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_3 q_o}{r_3^2} + \cdots$$

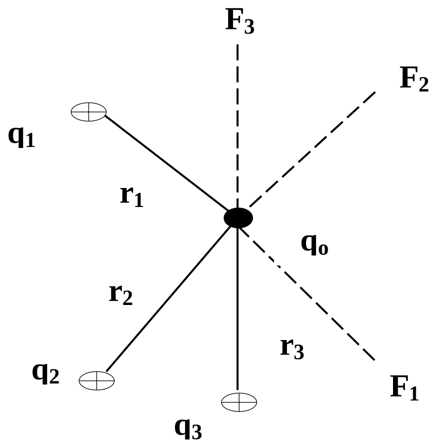
$$F = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_3}{r_3^2} + \cdots\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_o}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} + \frac{q_3}{r_3^2} + \cdots\right)$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum\nolimits_i \frac{q_i}{r_i^2} ----(4)}$$

اذ ان المعامل (i) يشير الى الشحنات النقطية المؤثرة على النقطة P.



شكل (2-2): أتجاه القوى الكهربائية المؤثرة على q_o الناتجة عن مجموعة من

الشحنات النقطية q_1 وq_2 و q_3

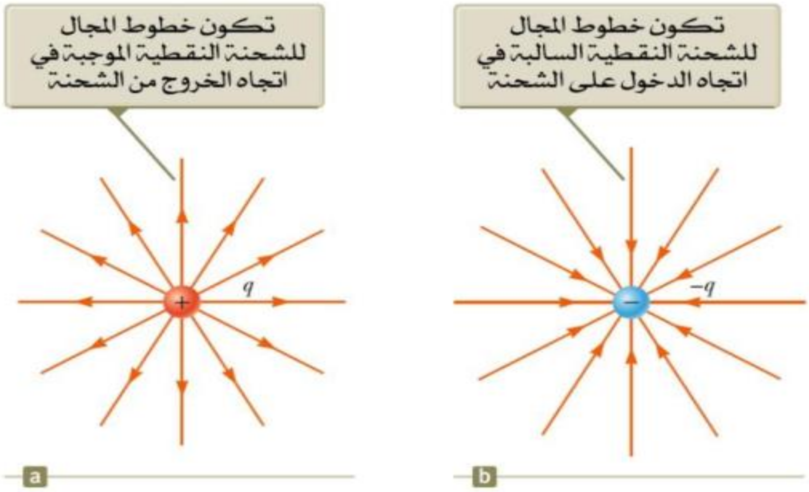
2-2 خطوط القوة الكهربائية Lines of The Electric Force

لقد قمنا فيما سبق بتعريف المجال الكهربائي رياضيا. افضل طريقة لتصور نماذج المجال الكهربائي هو برسم خطوط تعرف باسم خطوط المجال الكهربائي وهي خطوط وهمية وأول من قدم هذه الفكرة العالم فارادي Faraday وذلك بربط المجال الكهربائي في منطقة من الفراغ من خلال الطريقة التالية:

- متجه المجال الكهربي $\vec{E}$ هو المماس لخط المجال الكهربائي عند كل نقطة. يمتلك الخط اتجاه يحدد باسهم لها نفس مقدار متجه المجال الكهربائي. اتجاه الخط يكون في اتجاه القوة المؤثرة على شحنة اختبار موجبة موضوعة في المجال .
- عدد الخطوط لكل وحدة مساحات تمر من خلال مساحة سطحية عموديا على خطوط المجال تتناسب طرديا مع مقدار المجال الكهربائي في تلك المنطقة. لهذا فان خطوط المجال الكهربائي تكون اقرب من بعضها البعض عندما يكون المجال الكهربي قويا وتكون خطوط المجال الكهربائي متباعدة عن بعضها البعض عندما يكون المجال الكهربي ضعيفا.
- تبدأ خطوط المجال الكهربائي من الشحنة الموجبة وتنتهي عند الشحنة السالبة .في حالة وجود شحنة واحدة فقط فان خطوط المجال تبدأ او تنتهي في مكان لا نهائي بعيد جدا.

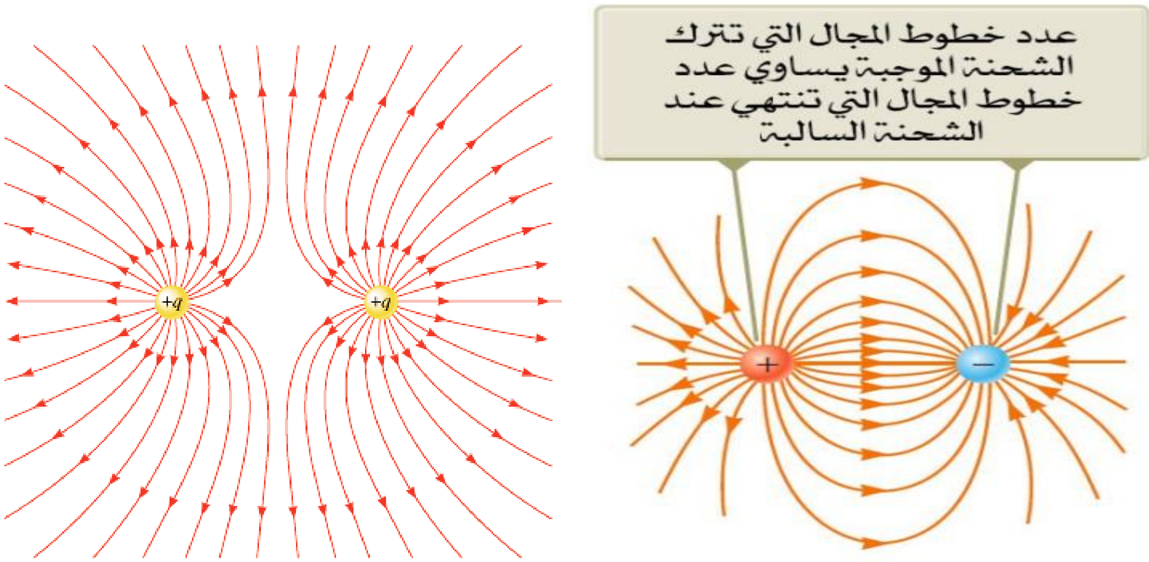
- عدد الخطوط التي تترك الشحنة الموجبة او تصل إلى الشحنة السالبة يتناسب طرديا مع مقدار الشحنة.

- لا يمكن لأي خطي مجال كهربي ان يتقاطعا.
- ان خطوط المجال تصبح متقاربة من بعضها البعض عندما تصل إلى الشحنة، مما يشير إلى ان شدة المجال الكهربي تزداد كلما اقتربنا من مصدر الشحنة.



شكل(2-3): خطوط المجال الكهربائي لشحنة نقطية.

غالبا لا تكون خطوط القوة الكهربائية مستقيمة بل بشكل منحنيات، فالشكل (2-3أ) يبين خطوط المجال الكهربائي الناشئ عن شحنتين نقطيتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاشارة (ثنائية قطب كهربائي). وشكل (2-3 ب) يبين خطوط المجال الكهربائي الناشئ عن شحنتين نقطيتين متساويتين في الاشارة.



شكل(2-4): خطوط المجال الكهربائي لشحنتان.

أشكال المجال الكهربائي:

يقسم المجال الكهربائي الى :

اولاً: مجالاً كهربائياً منتظماً

1. وهو المجال الذي ينشأ بين صفيحتين مشحونتين متوازيتين.
2. تكون خطوط المجال المنتظم متوازي والبعد بينهما متساوي.
3. مقدار المجال الكهربائي المنتظم ثابت في كل نقطة تقع في المجال أي ان عدد خطوط المجال التي تخترق وحدة المساحة العمودية ثابت عند أي نقطة.
4. أتجاه المجال الكهربائي المنتظم ثابت في كل نقطة في المجال.

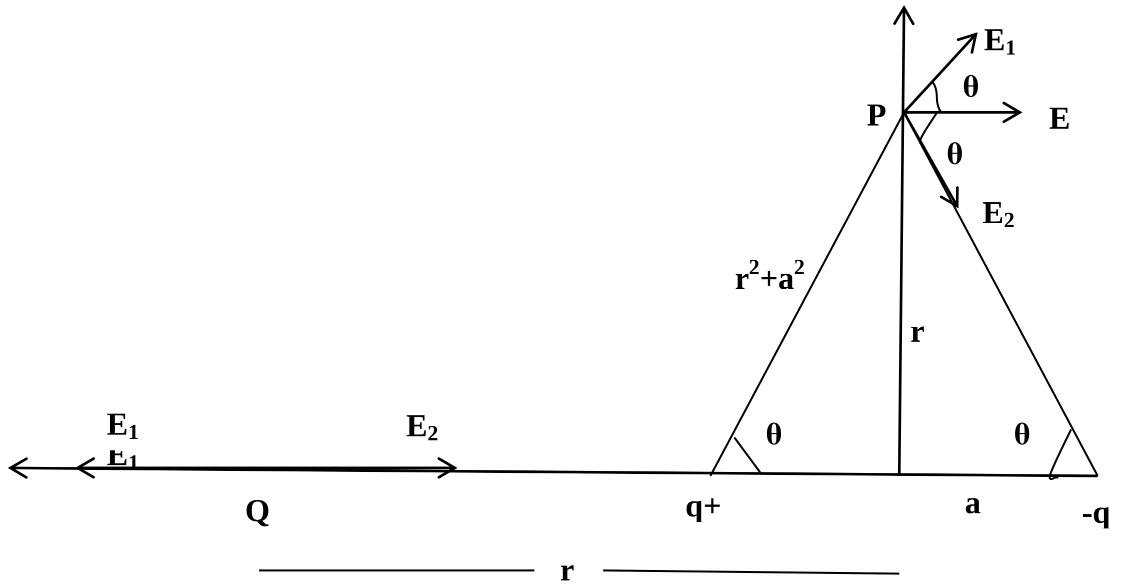
ثانياً: مجالاً كهربائياً غير منتظماً

1. هو المجال الذي ينشأ عن الشحنات المفردة.
2. تتباعد خطو
3. المجال غير المنتظم عن بعضها كلما ابتعدت عن الشحنة.
4. يتغير مقدار المجال الكهربائي غير المنتظم في كل نقطة في المجال أي ان عدد خطوط المجال التي تخترق وحدة المساحة العمودية لا يكون ثابتاً.
5. أتجاه المجال الكهربائي متغير في كل نقطة.

3-2 تطبيقات عن كيفية حساب شدة المجال الكهربائي باستخدام شحنة اختبارية

1-3-2 مجال ثنائي القطب الكهربائي The Field of Electric

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنة موجبة +q وأخرى سالبة -q متساوية في المقدار تفصلهما مسافة صغيرة قدرها (2a) كما في الشكل :



شكل (2-5): شدة المجال الكهربائي عند نقطة في المجال لثنائي القطب.

<u>(1)</u> ان المجال الكهربائي الناشئ عن الشحنتين +q و -q عند النقطة P الواقعة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب.

عند النقطة P فان مقدار شدة المجال الكهربائي E_1 يساوي E_2 بسبب ان P تقع على نفس المسافة من الشحنتين (r^2+a^2)، اذ ان:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(r^2+a^2)} ------(5)$$

ولإيجاد محصلة المجال الكهربائي لابد كل من تحليل كل من E_1 و E_2 الى مركبتين أحداهما عمودية على محور ثنائي القطب والاخرى موازية له ومن تماثل الشكل نجد ان المركبتين العموديتين على المحور يمحو أحداهما الأخرى، اما المركبتين المتوازيتين تضاف أحداهما الى الاخرى لكونها باتجاه محور ثنائي القطب نحو اليمين. وبأجراء الجمع لكلتا المركبتين، أي:

$$E = E_1 + E_2$$

يكون مقدار المجال الكهربائي المحصل E هو :

$$E = E_1 COS\theta + \ E_2\ COS\theta = 2E_1\ COS\theta - - - - (6)$$

وبالتعويض عن E_1 من معادلة (1) في معادلة (2)

وتعويض عن $COS\theta = \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}}$ ينتج:

$$E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{q}{(r^2+a^2)}\ \frac{a}{(r^2+a^2)^{1/2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2qa}{(r^2+a^2)^{3/2}}$$

وبما ان $r \gg a$ لذا تهمل a^2 بالنسبة للمقدار r^2 ، فان:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2qa}{r^3}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{P}{r^3}\ - - - - - (7)}$$

اذ ان P=2qa تعني العزم الكهربائي لثنائي القطب Electric Dipole Moment هو كمية متجهة، أتجاهها من الشحنة السالبة الى الشحنة الموجبة.

(2) يمكن ايجاد شدة المجال عند النقطة Q الواقعة على العمود المنصف لمحور ثنائي القطب من ايجاد E_1 و E_2

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{(r-a)^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-q}{(r+a)^2}$$

وكما هو واضح في الشكل (2-5) فان أتجاه المجال الكهربائي E_1 الناشئ عن الشحنة +q هو بعكس أتجاه المجال E_2 الناشئ من الشحنة –q، وبهذا فان شدة المجال الناشئ عن ثنائي القطب $\vec{E}$ يساوي المجموع الاتجاهي لكلتا المعادلتين أعلاه، أي ان:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$$

وعلية فان مقدار محصلة المجال الكهربائي يساوي:

$$E = E_1 - E_2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q}{(r-a)^2} - \frac{q}{(r+a)^2}\right] \quad = \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{4ra}{(r^2-a^2)^2}\right]$$

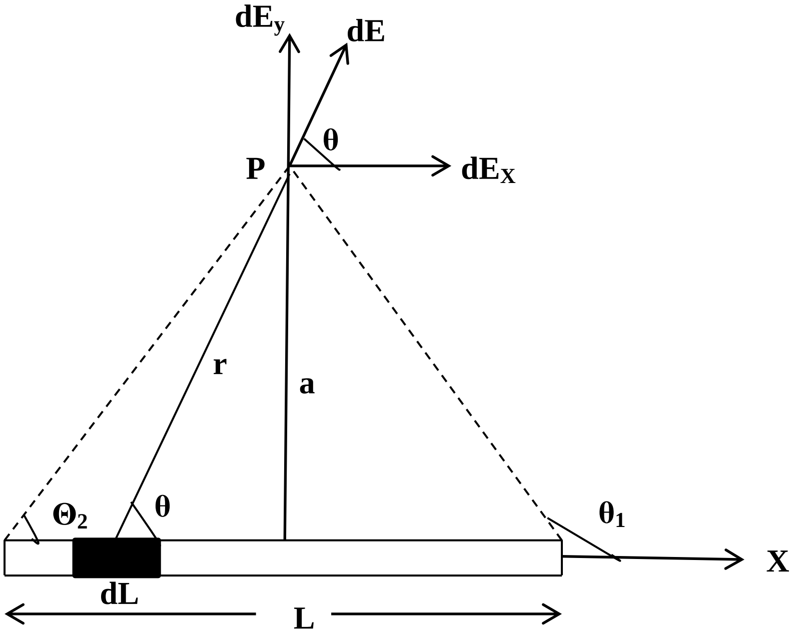
الاشارة الموجبة لنتائج المحصلة E تدل على ان أتجاه E عند النقطة Q يكون على امتداد محور ثنائي القطب بأتجاه المحور X وعند $r \gg a$ ويمكن اهمال a^2 بالنسبة للمقدار r^2 عندئذ تأخذ المعادلة السابقة الصيغة الاتية:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4aq}{r^3}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2P}{r^3} - - - (8)}$$

2-3-2 المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة موزعة على طول خط مستقيم

يبين الشكل (2-6) سلك عازل طوله L يحمل شحنة موجبة +q موزعة بصورة متجانسة على طول محور X بكثافة خطية قدرها λ



شكل (2-6)

ولحساب شدة المجال الكهربائي في نقطة مثل P تقع على العمود المنصف لهذا السلك وتبعد عنه مسافة قدرها a نفرض ان الشحنة q مقسمة الى عناصر صغيرة طول كل منها dL، وان dq هي مقدار شحنة العنصر. وبما ان السلك يحمل شحنة ذات كثافة خطية λ فان مقدار dq على كل عنصر هي $dq=\lambda dL$.

ان شدة المجال dE الناشئ عن عنصر الطول dL عند النقطة P هو بأتجاه محور y الموجب وذلك لان لكل عنصر شحنة في جهة اليسار هناك عنصر يقابله في جهة اليمين وهذا ما يؤدي الى تعادل مركبتي مجاليهما dE_x في اتجاه المحور X. في حين نرى مركبتيهما dE_y في اتجاه محور y الموجب دائماً. ويتضح من الشكل فان مقدار المركبة dE_y للعنصر هو:

$$dE_y = dE\ sin\theta$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dL}{r^2}$$

فان شدة المجال في النقطة P تكون:

$$dE = \overrightarrow{dE_y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dL}{r^2}\ sin\theta$$

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\frac{sin\theta}{r^2}\ dL ----(9)$$

يلاحظ من هذه المعادلة انها تحتوي على ثلاث متغيرات هي L,θ,r ولاجل حلها يجب الابقاء على متغير واحد وليكن θ. من الشكل () نجد ان:

$$L = -a\ cot\theta\ \ \rightarrow\ \ r = a\ csc\theta$$

$$dL = a\ csc^2\theta\ d\theta$$

وبالتعويض عن قيمة dL و r في المعادلة (1) نحصل على:

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\frac{sin\theta}{csc^2\theta}\ a\ csc^2\theta\ d\theta$$

الان يصبح بالامكان ايجاد محصلة شدة المجال الكهربائي E في النقطة P باجراء عملية التكامل:

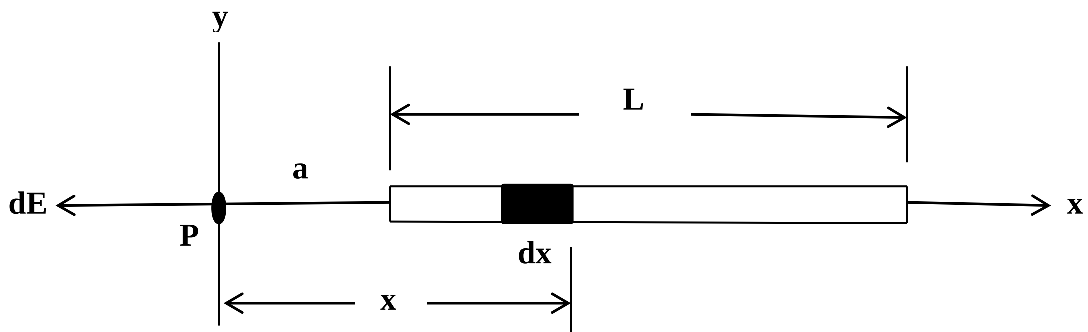
$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o\ a}\left[\frac{L}{\left(\frac{L^2+4a^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$\boldsymbol{E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_o\ a\sqrt{L^2+4a^2}} ----(10)}$$

في الحالة الخاصة عندما يمتد السلك على جهتي محور X لمسافة طويلة عندئذ تصبح a=0 ، وان:

$$\boldsymbol{E = \frac{2q/L}{4\pi\varepsilon_o\ a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\ a} ----(11)}$$

2-3-3 المجال الكهربائي عند النقطة P الواقعة على مسافة a من احدى نهايتي السلك



شكل (2-7)

المجال الكهربائي dE الناشئ عن عنصر الطول dx عند P هو بأتجاه محور X السالب وذلك لان مصدره حاملات الشحنة الموجبة q، ويعطي مقداره من المعادلة:

$$dq = \lambda\, dx$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{X^2}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dx}{X^2}$$

وبسبب ان المجال الناشئ عن جميع عناصر السلك الاخرى هو بأتجاه محور X السالب فان جمع اسهم كل العناصر التي على أبعاد مختلفة من P، أي:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{\lambda dx}{X^2}$$

ووفقاً للحالة الحالية تؤخذ حدود التكامل في المعادلة اعلاه بين a و L+a فيكون:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\lambda\int_a^{L+a}\frac{dx}{X^2} \quad = \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\lambda\left[-\frac{1}{X}\right]_a^{L+a}$$

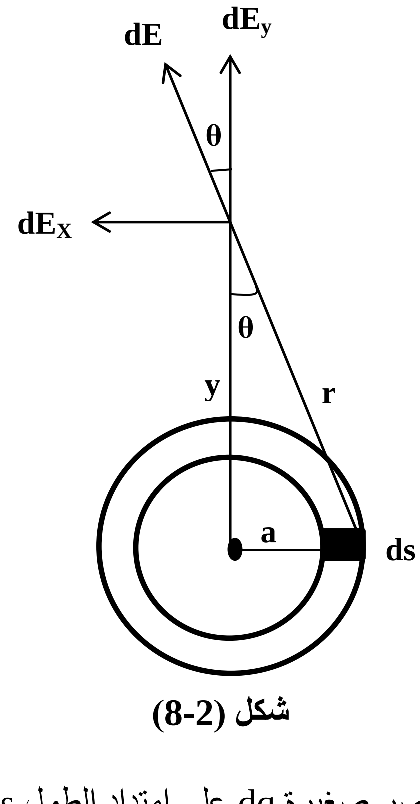
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\lambda\left(\frac{L+a-a}{a(L+a)}\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\lambda\left(\frac{L}{a(L+a)}\right) ------ (12)$$

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{a(L+a)} ------ (13)}$$

4-3-2 المجال الكهربائي لحلقة مشحونة نصف قطرها a

المجال الكهربائي عند النقطة P الناشئ عن حلقة مشحونة نصف قطرها a تحمل شحنة موجبة مقدارها q موزعة بصورة متجانسة الواقعة على محور الحلقة وعلى مسافة y من مركزها كما في الشكل (2-8).



شكل (2-8)

نفرض ان الشحنة q مقسمة الى عناصر صغيرة dq على امتداد الطول ds وتساوي:

$$dq = \frac{q}{2\pi a}\, ds$$

وان شدة المجال dE عن عنصر الطول ds عند النقطة P يكون بأتجاه محور y الموجب، وان مقدار شدة المجال E الناشئ عن جميع عناصر الشحنة يمكن حسابه بتكامل المجالات الصغيرة الناشئة من كل العناصر المكونة لشحنة الحلقة، أي:

$$E = E_y = dE_y = \int dE\, cos\theta ----(14)$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2} \quad \rightarrow \quad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qds}{2\pi a r^2}$$

$$cos\theta = \frac{y}{r}$$

وبالتعويض عن هاتين المقدارين في المعادلة (14) نحصل على:

$$E = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qds}{2\pi a r^2}\frac{y}{r} \quad = \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qy}{2\pi a r^3}\int ds \; ----(15)$$

وباستعمال نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية نجد ان:

$$r = (y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad r^3 = (y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int ds = s = 2\pi a$$

وبالتعويض هذه القيم في معادلة (15) وبعد الترتيب نجد ان:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qy}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} ----(16)$$

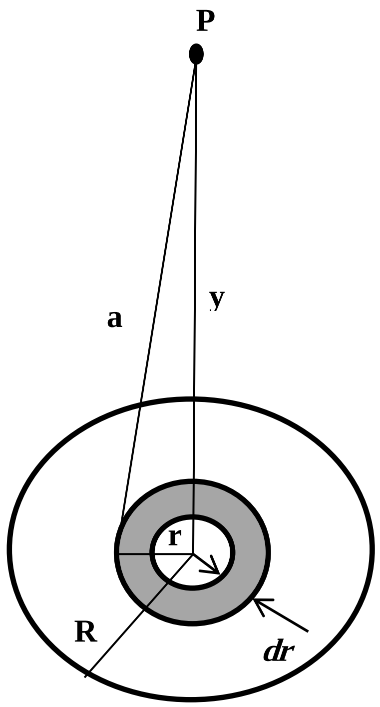
هذه النتيجة تبين ان شدة المجال الكهربائي في مركز الحلقة يساوي صفراً.

وفي حالات الخاصة عندما تكون النقطة P بعيدة جداً عن مركز الحلقة أي $y>>a$ يمكن اهمال a^2 و y^2 وتصبح قيمة شدة المجال الكهربائي:

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{y^2} ----(17)}$$

5-3-2 المجال الكهربائي لقرص دائري نصف قطرها R

حساب شدة المجال الكهربائي لقرص دائري نسف قطرة R ويحمل شحنة موجبة +q عند النقطة P موزعة بصورة متجانسة كثافتها السطحية σ . الشكل (2-9)



شكل رقم (2-9)

ويعطي الشكل مقدار شدة المجال الكهربائي الناشئ عن حلقة مشحونة نصف قطرها r. لهذا نقسم القرص الى عناصر تفاضلية على شكل حلقات متحدة المركز بنصف قطر r وسمك dr. ان مساحة الحلقة تساوي 2πrdr، أما شحنة الحلقة dq فيمكن حسابها من ضرب مساحة الحلقة في كثافة الشحنة السطحية، أي :

$$dq = 2\pi\sigma r dr$$

من المعادلات السابقة (16) نحصل على :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{y dq}{(r^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} ----(18)$$

وبالتعويض عن شحنة العنصر التفاضلي dq نجد:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{y(2\pi\sigma r dr)}{(r^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} ----(19)$$

وبعكس الحالات التي درست في الامثلة السابقة فان المجلات الناشئة عن الحلقات الدائرية في مثالنا هذا تكون جميعاً بنفس الاتجاه، لذا تحيز لنا هذه الحالة اجراء التكامل للمعادلة (19) مباشرةً على اعتبار ان التكامل عملية جمع جبرية وليست أتجاهية.

وبهذا فان محصلة شدة المجال الكهربائي عند النقطة P يمكن ايجادها من تكامل المعادلة مباشرةً وان حدود التكامل يجب ان تمتد من r=0 الى r=R لكي يعطي شحنة القرص جميعها، اذن:

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_o}\int_0^R \frac{2rdr}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_o}\int_0^R (y^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\, 2rdr$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_o}\left|\frac{(y^2+r^2)^{-1/2}}{-1/2}\right|_0^R$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_o}\left[\frac{(y^2+R^2)^{-1/2}}{-1/2}\ \frac{y^{-1}}{-1/2}\right]$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_o}\left[-\frac{2}{(y^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{y}\right]$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1-\frac{y}{(y^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right] ------ (20)}$$

ومن الحالات الخاصة التي تعطينا نتائج ابسط هي عندما يراد حساب مقدار محصلة شدة المجال الكهربائي في نقطة قريبة من مركز القرص أي في الحالة R>>y عندئذ:

$$\boldsymbol{E \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} ----(21)}$$

مثال (1) : أوجد مقدار واتجاه المجال الكهربائي عند مسافة 100 cm من الكترون؟ اعد المسألة لبروتون؟

الحل: 1- بالنسبة لإلكترون:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{o}}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}=\frac{9\times 10^{9}\ \times\ 1.6\times 10^{-19}}{1^2}=1.44\times 10^{-9}\ (N/C\ )$$

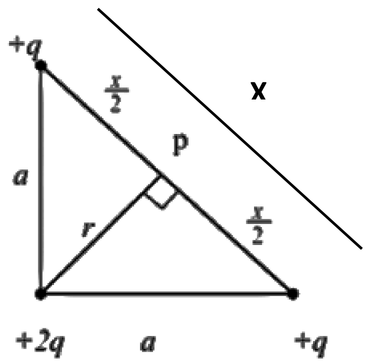
بالاتجاه نحو الالكترون

2- بالنسبة لبروتون:

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{o}}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}=\frac{9\times 10^{9}\ \times\ 1.6\times 10^{-19}}{1^2}=1.44\times 10^{-9}\ (N/C\ )$$

بالاتجاه بعيداً عن البروتون (لماذا ؟)

مثال (2): اوجد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي عند النقطة P كما في الشكل:



من ملاحظة الشكل نجد ان مقدار شدة المجال الكهربائي الناشئ عن الشحنتين q+ عند النقطة P يساوي صفراً. وذلك لان المجالين متعاكسين في الاتجاه. أما مقدار شدة المجال الناشئ عن الشحنة 2q+ فيمكن ايجاده بتطبيق المعادلة:

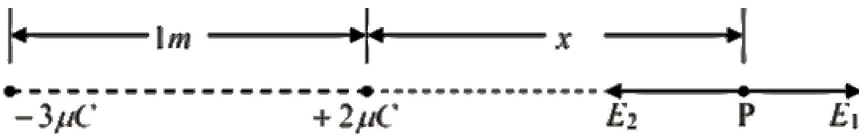
$$x=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a\ ,\qquad \frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$a^2=r^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=r^2+\frac{a^2}{2}$$

$$r^2=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{o}}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2q}{\frac{a^2}{2}}=\frac{q}{\pi\epsilon_o a^2}$$

مثال (3): شحنتان نقطيتان قيمتهما +2µc و -3µc تفصلهما مسافة قدرها 1m في الهواء كما في الشكل. جد موقع النقطة الواقعة على امتداد الخط المستقيم الواصل بين الشحنتين التي عندها تصبح شدة المجال الكهربائي صفراً.



الحل// ان احتمال وقوع نقطة التعادل في المنطقة بينهما غير ممكن، وذلك لان المجال الناشئ عن الشحنة الاولى يكون بعكس اتجاه المجال الناشئ عن الشحنة الثانية، وهذا يعني ان موقع النقطة التي عندها تكون شدة المجال الكهربائي صفراً يجب ان يكون خارج المنطقة المحصورة بين الشحنتين.

وفقاً للمعادلة المجال حيث q تتناسب طردياً مع E والبعد r عكسياً معها. فان نقطة التعادل بين مجالي الشحنتين الموجبة والسالبة يجب ان تقع اقرب الى الشحنة الموجبة منه الى الشحنة السالبة. فاذا كان E_1 المجال الناشئ عن الشحنة الكبيرة السالبة q_2، وبما ان المجالين متعاكسان بالاتجاه فان الشرط لتكون محصلة المجال صفرا.

$$E_1 = E_2$$

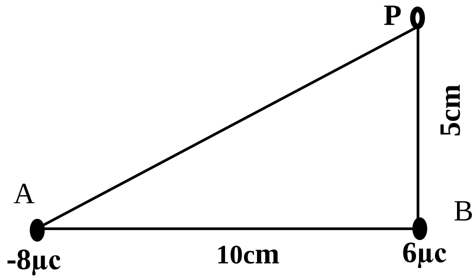
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{(x+1)^2}$$

$$9\times10^9\,\frac{2\times10^{-6}}{x^2} = 9\times10^9\,\frac{3\times10^{-6}}{(x+1)^2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{x+1} \quad \to \therefore x = 4.45\ m$$

وهذا يعني ان النقطة التي عندها تكون محصلة المجال الكهربائي صفراً تقع على مسافة 4.45m من الشحنة الموجبة و 5.45m من الشحنة السالبة.

مثال(4): اوجد المجال الكهربائي عند النقطة P ؟



$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_o}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}} = \frac{9\times10^{9} \times 6\times10^{-6}}{(5\times10^{-2})^2} = 2.16\times10^{7}\ (N/C)$$

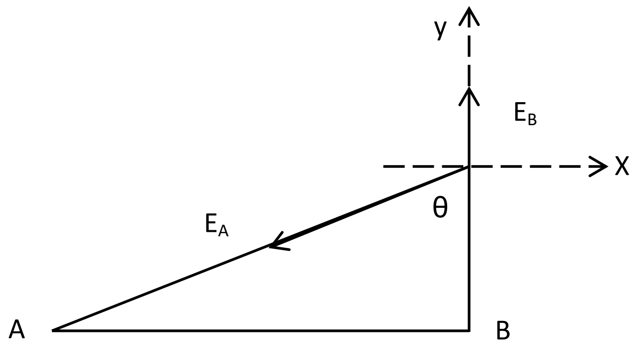
وهو بالاتجاه (BP).

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_o}}\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r^2}} = \frac{9\times10^{9} \times 8\times10^{-6}}{(11.18\times10^{-2})^2} = 0.576\times10^{7}\ (N/C)$$

حيث (r = AP = 11.18cm)، والمجال في الاتجاه (PA).

أي ان المجال الكهربائي عند النقطة (P) هو المجموع الاتجاهي لهذين المجالين، أي:

$$E = E_1 + E_2$$



ولأيجاد المحصلة فاننا نجد E_x و E_y لكل من المجالين، فاذا استعملنا الاحداثيات التي في الشكل اعلاه فان مركبتي المجال الكهربائي للشحنة (6μc) في الاتجاهين (x) و (y) هما:

$$E_x = 0\ ,\ E_y = +2.16\times10^{7}\ \text{N/c}$$

أما مركبتا المجال الكهربائي للشحنة (-8μc) في الاتجاهين (x) و (y) هما:

$$E_x = -\mathrm{E}\sin\theta = -0.576\times10^7\left(\frac{10}{11.18}\right) = -0.515\times10^7\ N/C$$

$$E_y = -\mathrm{E}\cos\theta = -0.576\times10^7\left(\frac{5}{11.18}\right) = -0.258\times10^7\ N/C$$

وبجمع المركبتين في الاتجاهين:

$$\therefore E_x = 0 - 0.515\times10^7 = -0.515\times10^7\ N/C$$

$$\therefore E_y = 2.16\times10^7 - 0.258\times10^7 = 1.9\times10^7\ N/C$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-0.515\times10^7)^2 + (1.9\times10^7)^2} = 1.97\times10^7\ N/C$$

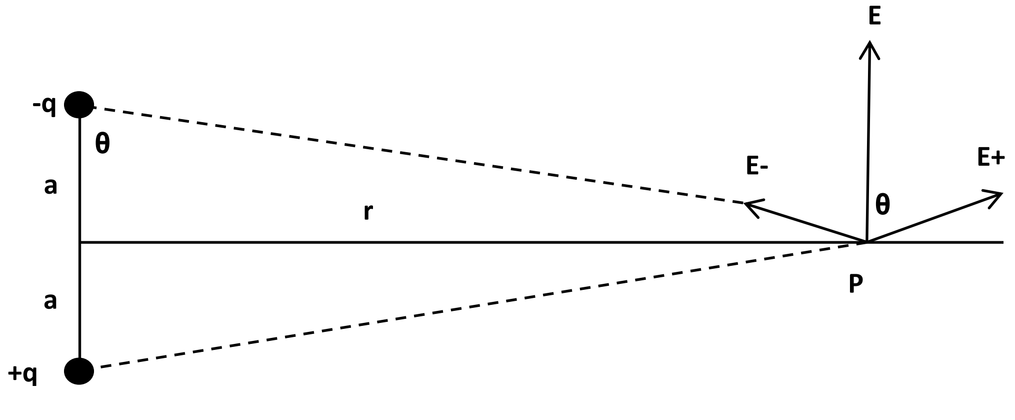
اما اتجاه (E) فانه:

$$\theta = tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} = tan^{-1}\frac{1.9\times10^7}{-0.515\times10^7} = 105.2^o$$

وهي مقاسة من الاتجاه الموجب للمحور (x).

<u>مثال(5):</u> اوجد المجال الكهربائي الناشئ عن ثنائي القطب الكهربائي (Electric dipole) عند النقطة تقع على المنصف العمودي للمسافة بين شحنتيه؟

الحل: ثنائي القطب الكهربائي عبارة شحنتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الاشارة، بينما مسافة صغيرة جدا (2a) مقارنة ببعد نقطة المجال، كالذي في شكل، ونريد ان نحسب شدة المجال الكهربائي عند المجال P



المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة (+q):

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(a^2+r^2)}$$

المجال الكهربائي الناتج عن الشحنة (-q):

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(a^2+r^2)}$$

وهما متساويان في المقدار، واتجاههما كما هو مبين في الشكل اعلاه. ومحصلة المجالين هو الجمع الاتجاهي لهما:

$$\therefore E = E_+ + E_-$$

نلاحظ ان المركبتين الافقيتين تتلاشيان، بينما المركبتان العموديتان يعزز بعضهما بعضا، ومجموعهما يساوي :

$$(2\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(a^2+r^2)}\ cos\theta)$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{(a^2+r^2)}\frac{a}{(a^2+r^2)^{1/2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2qa}{(a^2+r^2)^{1/2}}$$

ونظرا لان (r>>a) وفق افتراضنا السابق، ومن تعريف ثنائي القطب فانه يمكن كتابة المعادلة الاخيرة كالتالي، وذلك باهمال (a^2) مقارنة بالقيمة الكبيرة نسبيا (r^2):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2qa}{r^3}$$

ويسمى مقدار (2qa) **بعزم ثنائي القطب** (Dipole moment) ويرمز له بالرمز (P)، وهو كمية متجهه ووحداتها (C.m). وبهذا يمكن كتابة المجال الكهربائي لثنائي القطب عند النقطة (P) كالاتي:

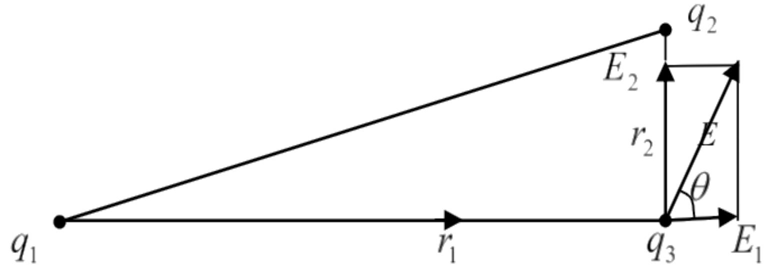
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{P}{r^3}$$

واجبات الفصل الثاني

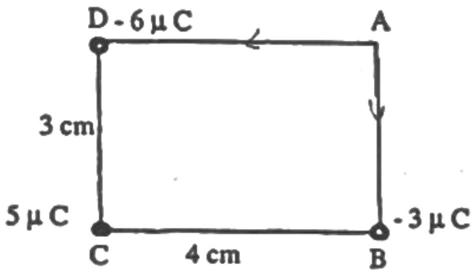
1] شحنتان نقطيتان الاولى قدرها 4μc+ والثانية 1μc- تفصلها مسافة قدرها 10m. عين النقطة الواقعة على الخط المستقيم المار بالشحنتين والتي عندها تكون شدة المجال صفراً

2] أوجد مقدار واتجاه المجال الكهربائي الناشئ عن الشحنتين q_1 و q_2 عند النقطة حيث موقع الشحنة q_3 كما مبين في الشكل، اذا علمت ان $q_1=1.5\times10^{-3}c$ و $q_2=-0.5\times10^{-3}c$ و $q_3=0.2\times10^{-3}c$ و

$r_2=1.5m$ و $r_1=1.2m$



3] وضعت على رؤوس المستطيل الذي في الشكل الشحنات (3μc-)، (5μc)، (6μc-). أوجد المجال الكهربائي عند النقطة A



4] وضعت شحنة مقدارها (10μc) على المحور (X) عند (X=0) ، ووضعت شحنة أخرى مقدارها (5μc-) ايضا على المحور (X) عند (X=2m). أوجد النقطة على المحور التي يكون فيها المجال الكهربائي يساوي صفر

الفصل الثالث / الجهد الكهربائي
Electric Potential

(3–1) فرق الجهد والجهد الكهربائي
Voltage Difference and Electric Potential

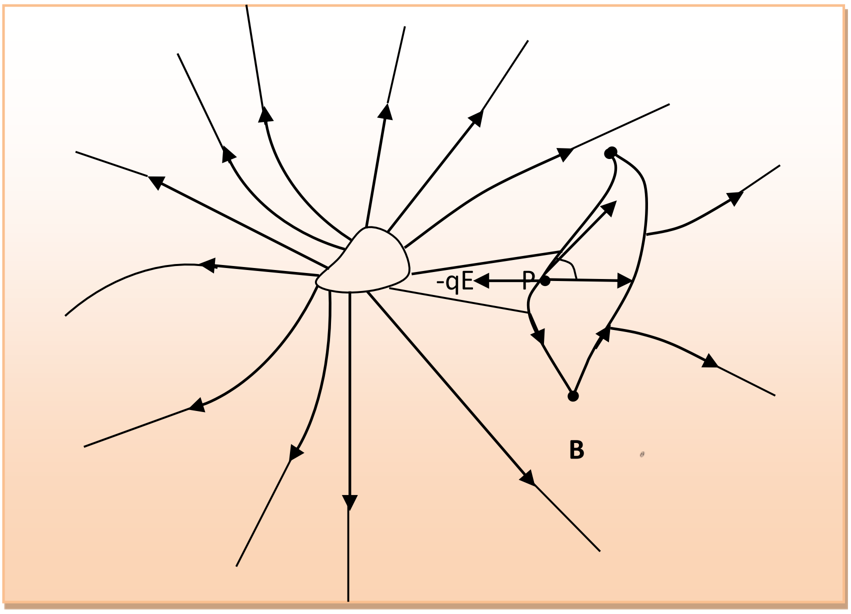
هناك حقيقة أصبحت معروفة ، وهي عند وضع شحنة كهربائية q في مجال كهربائي سيؤثر عليها المجال بقوة مقدارها qE ويكون اتجاهها مع اتجاه المجال الكهربائي. وإذا أردنا أن نمسك هذه الشحنة في مكانها فلابد أن نؤثر عليها بقوة مقدارها $-qE$.

لنعتبر حالة شحنة اختبارية موجبة q_0 موجودة أصلاً في النقطة p داخل مجال كهربائي غير منتظم كما في الشكل (3–1). فلو أردنا تحريكها إلى النقطة B على طول المسار a للزم علينا بذل شغل بعامل خارجي ضد القوة الكهربائية بحيث تبقى حركة الشحنة دائماً في حالة اتزان. وهذا الشغل يساوي الزيادة في الطاقة الكامنة للشحنة.

إن فرق الجهد بين النقطتين A و B داخل المجال الكهربائي هو الشغل المبذول ضد القوة الكهربائية لنقل وحدة شحنة الاختبار الموجبة من A إلى B. ويعّرف فرق الجهد بين النقطتين A و B بأنه الشغل المنجز W_{AB} لوحدة الشحنة، أي :

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \qquad \text{........(1-3)}$$

إن وحدات SI لفرق الجهد هي جول لكل كولوم. وسنطلق على هذه الكمية المشتقة اسم فولت V نسبة إلى العالم الإيطالي اليساندرو فولتا(1745–1827).وهناك أجزاء لهذه الوحدة تستعمل لقياس فروق الجهد الصغيرة كالملي فولت mV الذي يعادل واحداً من ألف من الفولت ،والمايكروفولت μV وقدرهُ واحد من مليون من الفولت. أما فروق الجهد الكبيرة يعبر عنها بالكيلو فولت KV الذي يعادل ألف من الفولت ،والميكافولت MV وقدرهُ مليون فولت. وحيث أن الشغل كمية عددية، فان فرق الجهد كمية عددية أيضاً.



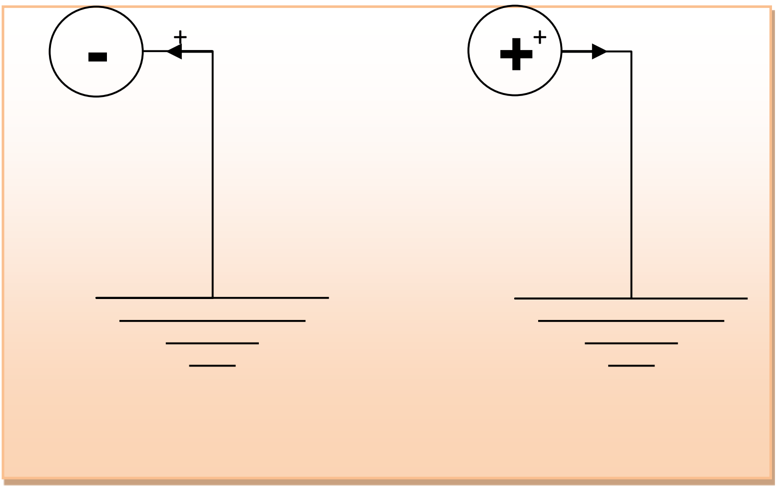
قياس الجهد عند أي نقطة، اتفق أن يكون جهد النقاط البعيدة جداً عن الشحنات مساوياً إلى صفر. وفي حالتنا لو اخترنا النقطة A في المالانهاية لأصبح الجهد V_A صفراً، وبالتعويض في المعادلة (1−3) نحصل على الجهد الكهربائي عند النقطة B.

إذن تعريف الجهد في نقطة ما هو عبارة عن الشغل لوحدة الشحنة الواجب إنجازه لنقل شحنة اختبارية موجبة من المالانهاية إلى تلك النقطة (أو من نقطة جهد صفر إلى النقطة المعنية) والعلاقة الرياضية هي :

$$V = \frac{W}{q_0} \qquad \text{……….(2-3)}$$

ولابد هنا من الإشارة إلى نقطة مهمة تتعلق بفرق الجهد وهي اعتبار جهد الأرض يساوي صفراً واتخاذه مرجعاً قياسياً لكثير من مسائل الدوائر الكهربائية. ولإيضاح ذلك سنعتبر كرتين مشحونتين إحداهما موجبة ويرمز لها بالعلامة (+) والأخرى سالبة ويرمز لها بالعلامة (−) كما مبين في الشكل (3−2). عند توصيل كل من الكرتين على انفراد بالأرض نجد أن كلتيهما تفقد ما عليها من شحنة كهربائية، ويفسر ذلك بان الشحنة الكهربائية في حالة الكرة الموجبة قد سرت منها إلى الأرض (الجهد الكهربائي للكرة الموجبة الشحنة اكبر من الجهد الكهربائي للأرض ولذلك فان الشحنة قد سرت من الكرة إلى الأرض حتى أصبح جهد الكرة صفراً). وفي حالة الكرة السالبة فان كهربائية موجبة قد سرت من الأرض إلى الكرة حتى تعادلت الشحنتان على الكرة (يقال إن الجهد الكهربائي للأرض اكبر من الجهد الكهربائي للكرة السالبة الشحنة ولذلك فان

الشحنة الموجبة قد سرت من الأرض إلى الكرة حتى أصبح جهد الكرة صفراً).وفي كلتا الحالتين فان الكرتين قد فقدتا شحنتيهما. غير إن الحال مع الكرة الأرضية يختلف، فبسبب حجمها الهائل فان كهربائيتها لا تتأثر بأي شحنة كهربائية تسري إليها أو منها إلى موصل مهما كانت قيمة هذه الشحنة، ولذلك اعتبر الجهد الكهربائي للأرض صفراً واتخذ لذلك مرجعاً لقياس الجهد. فإذا قيل إن لموصل ما جهداً موجباً فان هذا يعني انه إذا وصل بالأرض فان الشحنة الكهربائية تسري منه إلى الأرض والعكس صحيح إذا كان جهد الموصل سالباً.



مثال (3−1)

إذا كان فرق الجهد بين قطبي بطارية هو $12V$ فما مقدار الشغل الذي تبذله البطارية لنقل إلكترون من قطبها الموجب إلى السالب. وكم لنقله بالاتجاه المعاكس.

الحل :

الانتقال بالإلكترون من قطب البطارية الموجب إلى السالب يعني المرور خلال انخفاض جهد وعليه فان $V=-12Volt$، لذا فان الشغل المبذول في هذه الحالة هو:

$$W=\Delta Vq=(-12)(-1.6\times10^{-19})=1.9\times10^{-18}J$$

أما ترك الإلكترون وشأنه سيجذبه نحو القطب الموجب وهذا يعني أنها تكون عند الجهد الأعلى أي $V=+12Volt$ لذا فالشغل المبذول في هذه الحالة يكون :

$$W=\Delta Vq=(+12)(-1.6\times10^{-19})=-1.9\times10^{-18}J$$

(2–3) علاقة فرق الجهد بشدة المجال
The Relation between Voltage Difference and Field Intensity

لإيجاد العلاقة بين فرق الجهد وشدة المجال، لابد من حساب الشغل الذي يلزم إنجازه من قبل عامل خارجي لتحريك شحنة اختبار موجبة q_0 في مجال غير منتظم وعلى مسار متموج بين النقطتين A و B بدون تعجيل كما في الشكل (3–1). فإذا فرضنا الشحنة q_0 تتحرك على طول المسار a بدون تعجيل فهذا يشترط أن تكون q_0 في أية نقطة على طول المسار بين Aو B واقعة تحت تأثير قوتين متعاكستين الأولى مسلطة من قبل المجال الكهربائي ومقدارها $+q_0E$ وتكون بنفس اتجاه المجال والثانية يسلطها عامل خارجي مقدارها $-q_0E$ وتكون بعكس اتجاه المجال وبهذا يصبح الشغل المنجز:

$$W_{AB}=-\int_A^B q_0E\cos\theta dr$$

أو

$$\frac{W_{AB}}{q_0}=-\int_A^B E\cos\theta dr \qquad ....(3\text{-}3)$$

حيث dr إزاحة تفاضلية على المسار a يعمل زاوية θ مع اتجاه المجال الكهربائي. وإذا قارنا المعادلتين (3–1) و (3–3) نجد إن فرق الجهد بين النقطتين A و B مساوٍ إلى:

$$V_B-V_A=-\int_A^B E\cos\theta dr \qquad ....(4\text{-}3)$$

وبربط المعادلتين (3–3) و (3–4) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} V_B-V_A&=\frac{W_{AB}}{q_0}\\ &\text{او}\\ V_B-V_A&=\frac{\Delta(p.E)}{q_0}\end{aligned}\right\} \qquad ....(5\text{-}3)$$

أي أن مقدار الشغل المنجز على هذه الشحنة q_0 يساوي التغير في طاقتها الكامنة$(P.E)$.

وفي الحالات الخاصة التي يكون فيها المجال منتظماً وموازياً لمسار الشحنة، فأن حركة الشحنة باتجاه معاكس لشدة المجال تجعل الزاوية θ بين E و dr تساوي 180^0 وتصبح المعادلة (3–4) كالآتي :

$$V_B-V_A=-\int_A^B E\cos180dr=E\int_A^B dr=Ed \qquad ....(6\text{-}3)$$

إذ أن d تمثل طول المسار بين النقطتين A و B.

يظهر من المعادلة (3−6) انه بالإمكان التعبير عن شدة المجال الكهربائي بالوحدة ($\frac{\text{فولت}}{\text{متر}}$). ويمكن إثبات التطابق بين هذه الوحدة والوحدة التي مرَّ ذكرها في الفصل الثامن وهي ($\frac{\text{نيوتن}}{\text{كولوم}}$) كالآتي :

$$\frac{\text{فولت}}{\text{متر}} = \frac{\text{جول}}{\text{كولوم. متر}} = \frac{\text{نيوتن . متر}}{\text{كولوم. متر}} = \frac{\text{نيوتن}}{\text{كولوم}}$$

مثال (3−2)

إذا علم أن فرق الجهد بين لوحين متوازيين متعاكسي الشحنة المسافة بينهما $1cm$ هو $100V$. احسب : 1− مقدار شدة المجال الكهربائي بينهما ، 2− مقدار التعجيل الذي يتحرك به ايون الهيدروجين كتلته $3.32\times10^{-27}kg$ وشحنته $1.6\times10^{-19}C$ إذا وضع في هذا المجال ، 3− سرعته بعد أن يقطع مسافة قدرها $0.5cm$ ، 4− طاقته الحركية بعد أن يقطع هذه المسافة.

الحل:

−1

$$\Delta V = Ed$$

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4\,N.C^{-1}$$

2− لما كانت شحنة ايون الهيدروجين موجبة، فان تعجيله يكون باتجاه المجال الكهربائي وعلى خط مستقيم، أما مقداره فيمكن إيجاده من المعادلة :

$$F = ma \Rightarrow qE = ma$$

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{1.6\times10^{-19}\times10^{4}}{3.32\times10^{-27}} = 4.819\times10^{11}\,m/\sec^2$$

3− سرعة ايون الهيدروجين بعد أن يقطع مسافة قدرها $0.5cm$ هي :

$$\mathrm{v} = \sqrt{2ax} = \sqrt{2\times4.819\times10^{11}\times0.5\times10^{-2}} = 6.94\times10^{4}\,m/\sec$$

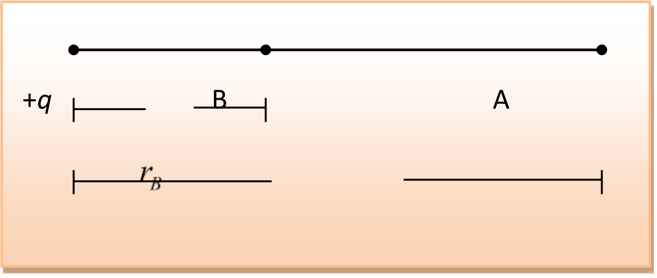
4− طاقة ايون الهيدروجين بعد أن يقطع المسافة نفسها هي:

$$K = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}\times3.32\times10^{-27}\times(6.94\times10^4)^2$$
$$= 7.99515\times10^{-18}\,J$$

(3–3)الجهد الكهربائي والطاقة الكامنة لشحنة نقطية

Electrical Potential and Potential Energy for Charge Point

لإيجاد مقدار الجهد الكهربائي في نقطة مثل B واقعة بالقرب من شحنة نقطية، نجد أولاً علاقة لفرق الجهد بين النقطتين A و B الواقعتين في المجال الكهربائي الخاص بالشحنة الموجبة q على المسافتين r_A و r_B على التوالي كما مبين في الشكل (3–3).



تستعمل المعادلة (3–4) في حساب فرق الجهد بين النقطتين A و B :

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dr$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\hat{r}}{r^2}$$

وهي شدة المجال الكهربائي في نقطة في الفراغ الذي يحيط بالشحنة q ويبعد عنها r

$$\therefore V_B - V_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} q\cos\theta\frac{dr}{r^2}$$

$$V_B - V_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} q\cos 0\frac{dr}{r^2}$$

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad \text{.........(7-3)}$$

والآن إذا جعل موضع النقطة A (أو B) في اللانهاية أو بعيدة جداً عن الشحنة q، فان $r_A = \infty$ $(r_B = \infty)$ ويصبح $V_A = 0$ $(V_B = 0)$ وبتعويض هاتين القيمتين لـ r_A وr_B في المعادلة (3–7) نحصل على قيمة الجهد المطلق عند النقطة B (أو A). ولأية نقطة على مسافة r في مجال الشحنة q نحصل على :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \text{........(8-3)}$$

ولإيجاد الجهد لمجموعة من الشحنات النقطية q_1 و q_2 و.....q_n، التي تبعد بالمسافات r_1 و r_2 و.....r_n عن نقطة ما مثل p واقعة في المجال الكهربائي الخاص بها، تُحسب V_1 و V_2 و.....V_n لكل شحنة على حدة عند النقطة p كما لو كانت الشحنات الأخرى غير موجودة، أي :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} \;,\; V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

وبذلك يكون الجهد الكلي هو حاصل الجمع الجبري للإسهامات المنفردة. ومرة أخرى هذا هو مبدأ التراكب ولكنه هنا باستعمال كميات قياسية وعلى الشكل الآتي:

$$V = V_1 + V_2 + ...+ V_n = \sum_n V_n$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q}{r_n} \qquad ……....(9\text{-}3)$$

حيث r_n هي المسافات التي تبعدها الشحنات q_n عن النقطة قيد الاعتبار.

وفي حالة كون الشحنة موزعة توزيعاً متصلاً، كأن تكون الشحنة موزعة على سطح جسم موصل أو موزعة ضمن حجم معين بشكل متصل، فيمكن إيجاد الجهد الناشئ عنها بتقسيم الشحنة إلى عدد كبير من العناصر التفاضلية dq ثم يحسب الجهد dV الناشئ عن كل عنصر مقداره dq عند نقطة تبعد r عن العنصر التفاضلي، أي:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} \qquad ……....(10\text{-}3)$$

ولإيجاد الجهد الكلي الناشئ عن الشحنة بأكملها تجرى عملية التكامل لجميع الجهود الناشئة عن الأجزاء التفاضلية ، أي :

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad ……... (11\text{-}3)$$

وباستعمال المعادلتين $(3-5)$ و $(3-7)$ يمكن حساب الطاقة الكامنة الكهربائية لأي شحنة مثل Q واقعة في مجال الشحنة النقطية q وبذلك نحصل على:

$$\Delta(p.E) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$$

أو

$$(p.E)_B - (p.E)_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$$

وبنفس الأسلوب الذي اتبع في حساب الجهد تكون الطاقة الكامنة للشحنة Q هي:

$$P.E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} \qquad \text{..........(12-3)}$$

مثال (3-3)

احسب الجهد المطلق في الهواء على بعد $3cm$ من شحنة نقطية $500\mu C$

الحل :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

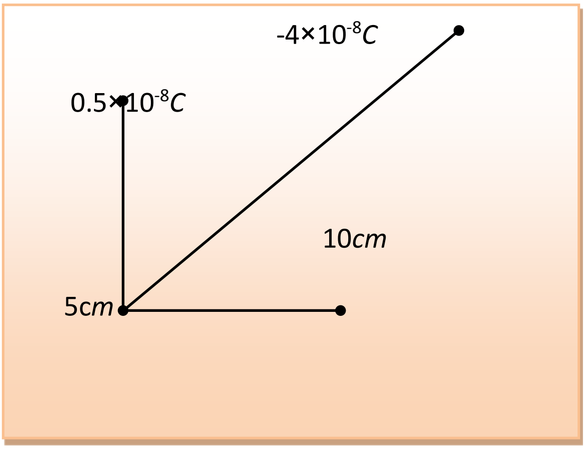
$$V = 9\times10^{9}\frac{500\times10^{-6}}{0.03} = 150000 \quad V=150KV$$

مثال (3- 4)

ثلاث شحنات نقطية $0.5\times10^{-8}C+$ و $4\times10^{-8}C-$ و $0.8\times10^{-8}C$ جميعها واقعة في المستوي xy ومثبتة في المواقع المؤشرة في الشكل (3-4). جدْ مقدار

1- الجهد الكهربائي عند نقطة الأصل 0 الناشئ عن الشحنات.

2- الشغل اللازم إنجازه لإحضار إلكترون إلى النقطة 0 من مسافة بعيدة جداً.



الحل:

1- الإسهامات المختلفة في الجهد عند النقطة 0 هي :

$$V_1 = 9\times10^{9}\frac{0.5\times10^{-8}}{0.05} = 900\ V$$

$$V_2 = 9\times10^{9}\frac{-4\times10^{-8}}{0.1} = -3600\,V$$

$$V_3 = 9\times10^9 \frac{0.8\times10^{-8}}{0.05} = 1440\,V$$

والجهد الكلي عند 0 هو:

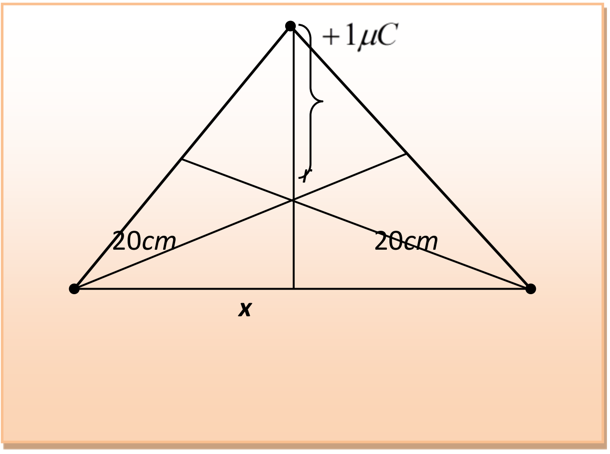
$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$V = 900 + (-3600) + 1440 = -1260\ V$$

2-الشغل المطلوب إنجازه لإحضار إلكترون بعيد جداً هو :

$$W = qV = (-1.6\times10^{-19})(-1260) = 2\times10^{-16}\,J$$

مثال (3-5)

يبين الشكل (3-5) ثلاث شحنات نقطية موضوعة عند أركان مثلث طول ضلعه $20cm$. احسب الجهد عند مركز المثلث : 1- إذا كانت كل من الشحنات الثلاث $+1\mu C$، 2- إذا كانت شحنتان من المثلث $+1\mu C$ والشحنة الثالثة $-1\mu C$.



الحل:

نجد بُعدْ مركز المثلث عن رؤوسه الثلاثة (r) حيث:

$$r = \frac{2}{3}x$$

من نظرية فيثاغورس نجد :

$$x = \sqrt{(20)^2 - (10)^2} = 22.36cm$$
$$\therefore r = \frac{2}{3}\times 22.36 = 14.9cm$$

ثم تطبق المعادلة (9-9) للحصول على الجهد :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum q_n}{r}$$

$$= 9\times10^{9}\ \frac{3\times1\times10^{-6}}{14.9\times10^{-2}} = 1.8\times10^{5}\,V$$

1- في حالة الشحنة الثالثة $-1\mu C$ نحصل على جهد:

$$V = 9\times10^{9}\ \frac{(1+1-1)}{14.9\times10^{-2}} = 0.6\times10^{5}\,V$$

مثال (3-6)

إلكترون يتحرك بسرعة $6\times10^{5}m/\sec$ عند مروره بنقطة A في طريقه إلى نقطة B. فإذا كانت سرعته عند B هي $12\times10^{5}m/\sec$ فاحسب فرق الجهد بين A و B وبين أيهما تكون عند جهد أعلى.

الحل :

الشغل المبذول في نقل الإلكترون من A إلى B يمثل الطاقة الكامنة المفقودة $(P.E)$ وتساوي $q(V_B-V_A)$، وأن الفقد يظهر كطاقة حركية للإلكترون ، أي :

$$q(V_B-V_A) = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2$$

$$\therefore V_B - V_A = \frac{m}{2q}(\mathrm{v}_2^2-\mathrm{v}_1^2)$$

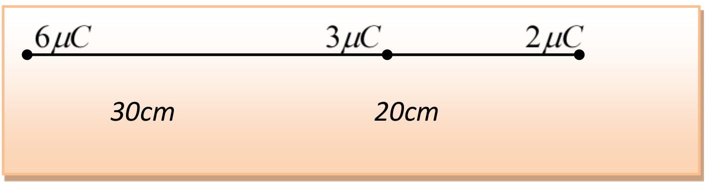
$$V_B - V_A = \frac{9.1\times10^{-31}}{2\times1.6\times10^{-19}}\left((12\times10^{5})^2-(6\times10^{5})^2\right)$$

$$V_B - V_A = 3.07\,V$$

من ذلك نستنتج أن نقطة B تكون عند جهد أعلى.

مثال (3-7)

احسب الطاقة الكامنة الكهربائية لثلاث شحنات نقطية مرتبة كما في الشكل (3-6).



الحل:

لنَقِلْ أي شحنة من المالانهاية إلى نقطة يكون عندها الجهد V فان شغلاً يجب أن يبذل على الشحنة، يظهر على هيئة طاقة كامنة كهربائية $(P.E)$ مختزنة في الشحنة. أن نقل الشحنة $2\mu C$ من المالانهاية لا يتطلب شغلاً لعدم وجود شحنات أخرى قريبة، في حين يكون الشغل اللازم لنقل الشحنة $3\mu C$ نتيجة التنافر مع $+2\mu C$ هو:

$$W_{3\mu c}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$

حيث الجهد هنا يكون نتيجة الشحنة $+2\mu C$

$$W_{3\mu c}=9\times10^{9}\frac{3\times10^{-6}\times2\times10^{-6}}{0.2}=0.27J$$

لنقِلْ الشحنة $6\mu C$ إلى الموضع المطلوب إحضارها عنده حيث الجهد يكون نتيجة الشحنتين $+2\mu C$ و $3\mu C$، وعليه فان الشغل اللازم لإنجاز ذلك $6\mu C$ هو:

$$W_{6\mu c}=9\times10^{9}\times6\times10^{-6}\left[\frac{2\times10^{-6}}{0.5}+\frac{3\times10^{-6}}{0.3}\right]=0.756\,J$$

بجمع مقادير الشغل اللازم لنقل الشحنات الكلية نحصل على الطاقة الكامنة الكهربائية المختزنة في النظام وهي:

$$P.E=0+0.27+0.765=1J$$

وعلى الطالب أن يثبت بأن الترتيب الذي نقل به الشحنات من المالانهاية لا يؤثر على هذه النتيجة؟

(4–3) الإلكترون فولت Electron Volt

اشرنا في البند الأول إلى أن وحدة الطاقة أو الشغل في النظام الدولي للوحدات SI هي الجول. غير أن هذه الوحدة تعتبر كبيرة جداً عند التعامل مع الجسيمات الأولية (الكترونات، بروتونات أو شحنات صغيرة من الايونات) التي نلتقي بها في حقل الفيزياء النووية. لذلك صار من المناسب التعامل مع وحدة أخرى للطاقة اصغر وأكثر ملائمة من الجول وهي الإلكترون فولت eV وتعّرف على إنها مقدار الطاقة التي يكتسبها جسم يحمل شحنة إلكترون واحد عندما يتسارع خلال فرق جهد مقداره فولت واحد. إذن عندما يتحرك إلكترون أو بروتون بحرية خلال فرق جهد مقداره واحد فولت فان طاقته أو الشغل اللازم لانجاز الحركة وفقاً للمعادلة (3–2) هي:

$$1eV=(1e)(1.602\times10^{-19}\frac{J}{e})=1.602\times10^{-19}J$$

مثال (3–8)

إذا علم إن فرق الجهد بين نقطتين في مجال كهربائي يساوي $1000V$ فما مقدار الشغل المطلوب لتحريك جسيمٍ ذي شحنة مقدارها 2e من أحدى النقطتين إلى الأخرى بوحدات.1- إلكترون فولت، 2− الجول.

الحل:

−1

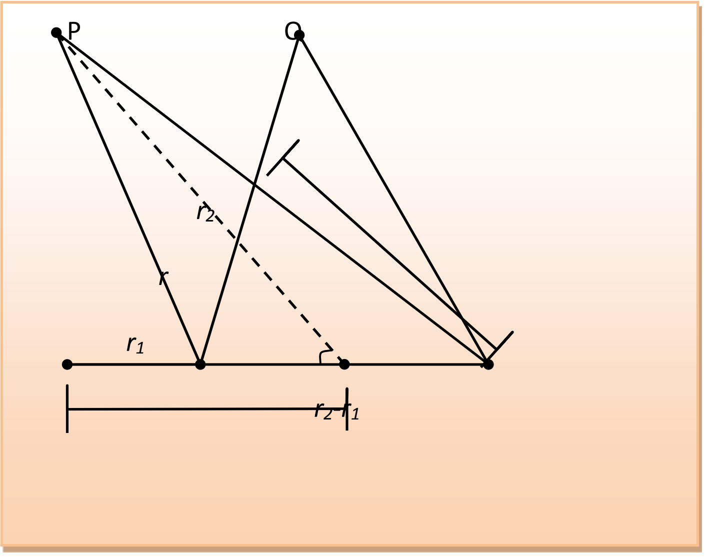
$$W = q(V_2 - V_1)$$
$$W = qV_{21} = (2e)\times(100\,V) = 200\,\mathrm{e}V$$

−2

$$W = 2\times1.6\times10^{-19}\times100\,V$$
$$= 3.2\times10^{-17}\,J$$

(5-3) جهد ثنائي القطب الكهربائي Potential Electric Dipole

يمثل الشكل (3-7) ثنائي قطب كهربائي متكون من شحنة موجبة $+q$ وأخرى سالبة $-q$ تفصلهما مسافة $2a$ والمطلوب إيجاد قيمة الجهد الكهربائي الناشئ عن الشحنتين $+q$ و $-q$ عند النقاط N و P و Q.



عند النقطة N الواقعة على امتداد محور ثنائي القطب نحو اليسار وتبعد مسافة r عن مركزه نجد إن الجهد الكهربائي للشحنة $+q$ و $-q$ على التتالي يكون:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r-a}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{r+a}$$

لذلك فان الجهد الكلي V لكلتا الشحنتين يساوي المجموع الجبري لجهديهما، أي :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-a} - \frac{q}{r+a}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(r+a)-(r-a)}{r^2-a^2}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{r^2-a^2} \qquad \text{.........(13-3)}$$

وفي الحالات التي تكون فيها النقطة N على مسافة بعيدة من مركز ثنائي القطب أي $(r>>2a)$ يمكن إهمال a^2 بالنسبة للمقدار r^2 ، عندئذ:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2} \qquad .... (14\text{-}3)$$

إذ أن $p = 2qa$ ترمز لعزم ثنائي القطب الكهربائي.

** أما الجهد الكهربائي عند النقطة P التي حدد موقعها بالإحداثيات القطبية r و θ (الشكل 3−7) فيمكن إيجاده بنفس الأسلوب، أي الجهد عند p للشحنة $+q$ يكون:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

أما الجهد عند نفس النقطة للشحنة $-q$ يكون:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_2}$$

لذلك فان الجهد الكلي V لكلتا الشحنتين يساوي المجموع الجبري لجهديهما ،أي:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \qquad ....(15\text{-}3)$$

وللحالات التي يكون فيها بعد النقطة p كبيراً بالنسبة لـ$2a$ أي $(r>>2a)$ يكون:

$$r_1 r_2 \cong r^2$$

$$r_2 - r_1 = 2a\cos\theta$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة (3−15) نحصل على:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad ....(16\text{-}3)$$

نجد من المعادلة (3−16) تحقيقٌ لنتيجة الجهد عند النقطة N في الحالة التي تكون على مسافة بعيدة من مركز ثنائي القطب، والتي عندها من المفترض أن تكون قيمة θ تساوي صفراً، أي cosθ=1 فعند تعويض هذه النتيجة في المعادلة (3−16) نحصل على نفس الصيغة التي حصلنا عليها في المعادلة (3−14). كما نجد من المعادلة (3−16) أن الجهد يساوي صفراً عند جميع النقاط الواقعة على الخط العمودي المقام من منتصف المسافة بين شحنتي ثنائي القطب أي عندما تكون الزاوية θ تساوي 90.

(3–6) حساب شدة المجال الكهربائي من الجهد الكهربائي

Calculation of Electric Field from Electric Potential

من المعلوم أن شدة المجال الكهربائي كمية اتجاهية وان حساب قيمتها بطريقة التكامل مباشرةً باستعمال المعادلة (2–11) أمر غير سهل. وطالما أن الجهد الكهربائي كمية غير اتجاهية ، لذا فمن الضروري أن يكون حساب شدة المجال عن طريق حساب الجهد يعد طريقة أسهل من حسابه بطريقة التكامل بصورة مباشرة. لاحظنا في البند (3–2) أن هناك علاقة بين شدة المجال E وفرق الجهد ΔV ممثلة في المعادلة (3–4) وهي:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dr$$

الآن يمكن حساب E إذا كان الجهد الكهربائي معروفاً في منطقة ما بالتعبير عن فرق الجهد dV بين نقطتين المسافة بينهما متناهية في الصغر dr بالشكل الآتي:

$$dV = -E\cos\theta dr \qquad \text{..........(17-3)}$$

حيث $E\cos\theta$ تمثل مركبة شدة المجال الكهربائي باتجاه dr، وان θ هي الزاوية المحصورة بين اتجاه $\vec{E}$ وعنصر المسافة dr. في الحالة التي تكون فيها الكمية $E\cos\theta$ باتجاه dr فان θ=0 عندئذ يمكن كتابة المعادلة (3–17) كالآتي :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \qquad \text{........... (18-3)}$$

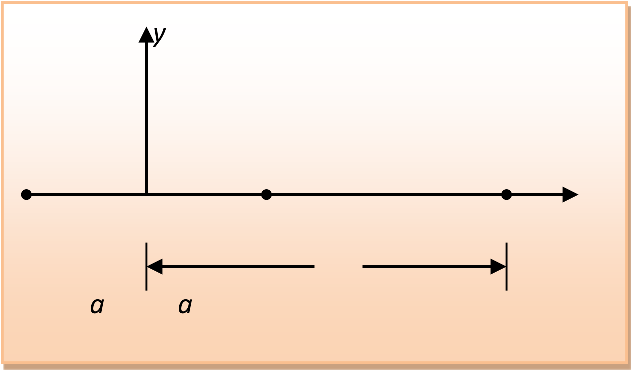
وهذه هي قيمة مركبة شدة المجال الكهربائي باتجاه المسافة dr ، أما الإشارة السالبة فهي تدل على إن اتجاه E هي باتجاه تناقص الجهد.أما إذا كان V متغيراً في أكثر من اتجاه مثل x و y و z فيمكن عندئذ إعادة كتابة المعادلة (3–18) في هذه الاتجاهات كالآتي :

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \text{.........(19-3)}$$

من المناقشة التي بنيت على أساس المعادلة (3–4) نجد أن الجهد الكهربائي يبقى ثابتاً لجميع نقاط المسار إذا كان عمودياً على المجال الكهربائي وسنأتي إليه في البند القادم.

مثال (3–9)

ثنائي قطب كهربائي يتكون من شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة تفصلهما مسافة $2a$ (شكل3–8). احسب:1– الجهد الكهربائي V عند النقطة p، 2– الجهد الكهربائي V وشدة المجال الكهربائي E_x عند نقطة بعيدة عن ثنائي القطب، 3– الجهد الكهربائي V وشدة المجال الكهربائي E_x إذا كانت p واقعة بين الشحنتين.



الحل:

1– الجهد الكهربائي عند النقطة p يكون:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n\frac{q_n}{r_n}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+q}{x-a}+\frac{-q}{x+a}\right)$$

$$V=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2-a^2}$$

2– إذا كانت النقطة p بعيدة عن ثنائي القطب $(x>>a)$ عندئذ تهملa^2:

$$\therefore V=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2}$$

وباستعمال المعادلة (9–18) ونتيجة الجهد أعلاه يمكن حساب E_x كما يأتي :

$$E_x=-\frac{dV}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2}\right)=-\left(\frac{-2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^3}\right)$$

$$\therefore E_x=\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^3}$$

3– في الحالة التي تكون بها p واقعة بين الشحنتين فان V و E_x تحسبان كما يأتي :

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n\frac{q_n}{r_n}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a-x}-\frac{q}{a+x}\right)$$

$$V=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{a^2-x^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{a^2 - x^2}\right)$$

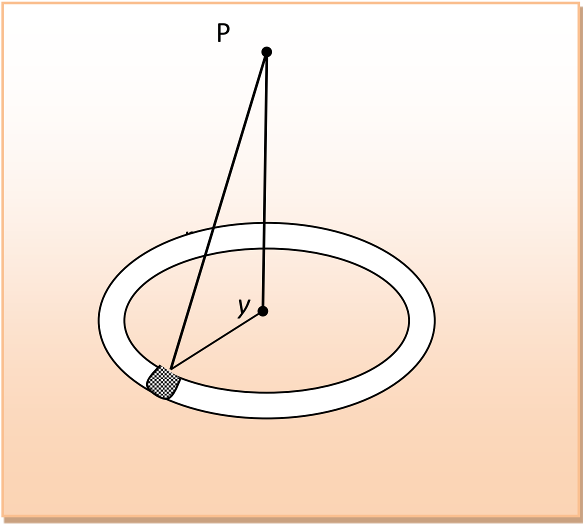
$$\therefore E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-x^2 - a^2}{(a^2 - x^2)^2}$$

مثال (3–10)

شحنة موجبة مقدارها q موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها a كما مبين في الشكل (3–9). احسب : 1– الجهد الناشئ عن الحلقة عند نقطة مثل p واقعة على محور الحلقة وعلى مسافة y من مركزها، 2– شدة المجال الكهربائي عند النقطة p .

الحل:

نقسّم الحلقة إلى عناصر تفاضلية تبعد جميعها بمسافات متساوية عن النقطة p المراد إيجاد الجهد عندها. ثم نأخذ احد هذه العناصر الذي تبلغ قيمة شحنته dq ونعتبرها بمثابة شحنة نقطية تبعد مسافة r عن النقطة p.



1– بتطبيق المعادلة (3–10) يمكن أن نجد مقدار الجهد الناشئ عن هذا العنصر وكما يأتي :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

بإجراء التكامل لكل من طرفي المعادلة نحصل على قيمة الجهد عند النقطة p:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + y^2}}\int dq$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

2- واضح من تناظر الشكل أن المجال الكهربائي يكون باتجاه محور الحلقة y لذا بالإمكان الحصول على E عند p بالاستفادة من المعادلة (3−18)، أي أن:

$$E = E_y = -\frac{dV}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right)$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

يبدو أن هذه النتيجة تتفق تماماً مع النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة التكامل بصورة مباشرة في البند (2−5) من الفصل الثاني المعادلة (2−18).

(3−7) جهد جسم كروي موصل مشحون
Potential of Spherical Body Charged Conductor

نعود الآن إلى علاقة الجهد الكهربائي عند أي نقطة على مسافة r في مجال شحنة نقطية q والمتمثلة بالمعادلة (3−8) وهي :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

ولابد أن نتذكر بان هذه المعادلة يصح تطبيقها في أية نقطة واقعة خارج جسم كروي موصل ولإيجاد قيمة الجهد الكهربائي عند جميع النقاط الواقعة داخل موصل كروي نصف قطره R ، والبرهنة على أنها متساوية في الجهد وتساوي قيمة الجهد على سطحه نفترض أن النقطة B تمثل أي نقطة على سطح كرة موصلة بينما النقطة A في داخل الكرة.

من الأدبيات المعروفة إن شدة المجال الكهربائي داخل الموصل يساوي صفراً، لذا طبقاً للمعادلة (4−9) نجد أن فرق الجهد بين النقطتين A و B يصبح:

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dr = 0 \qquad \therefore V_B = V_A$$

هذا يعني إن الجهد عند أي نقطة على سطح كرة موصلة مثل B يساوي الجهد عند النقطة A في داخل الكرة. وبكلام آخر فان قيمة الجهد عند جميع النقاط الواقعة داخل كرة موصلة تكون متساوية وتساوي قيمة الجهد على سطحه.

لنعود الآن إلى الشكل (3−3) ونتخيل كرة موصلة مشحونة بـ$+q$ بدلاً من الشحنة النقطية $+q$ وان النقطة B تقع على سطح الكرة التي تبعد r_B عن مركزها. فباستعمال المعادلة (3−7) نستطيع أن نجد فرق الجهد بين النقطتين A و B :

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

وبنفس الطريقة نحصل على علاقة خاصة للجهد الكهربائي عند النقطة B الواقعة على سطح الكرة الموصلة بعد فرض إن الجهد عند النقطة A يساوي صفراً في المالانهاية:

$$V_B - 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$\therefore V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}$$

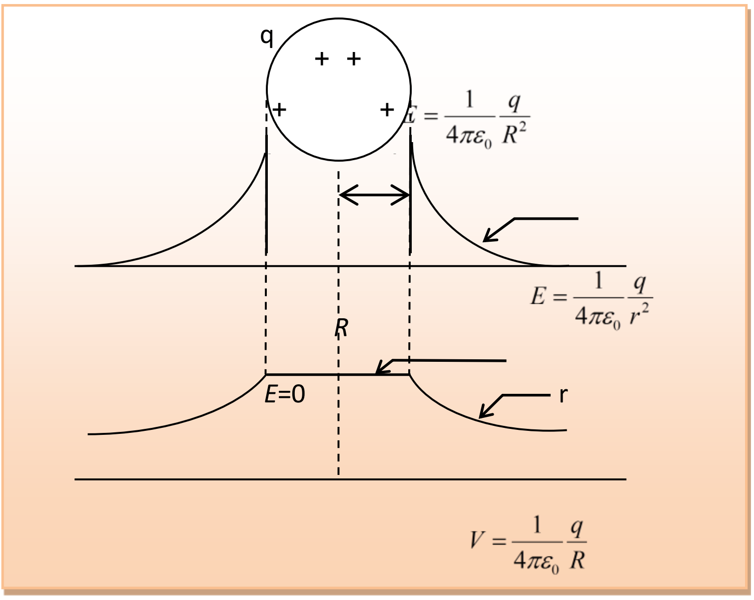
وبالتعويض عن r_B بـR نحصل على :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad \text{.........(20-3)}$$

إن الجهد عند أي نقطة واقعة خارج جسم كروي موصل وعلى بعد r من مركزه هو:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

يبيّن الشكل (3−10) توزيع كل من مقدار شدة المجال الكهربائي والجهد داخل كرة موصلة وخارجها نصف قطرها R ومشحونة بشحنة موجبة مقدارها $+q$.



إن مقدار شدة المجال الكهربائي على سطح الكرة الموصلة يساوي:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots.(21\text{-}3) \qquad \therefore V=RE$$

$$\ldots\ldots\ldots..(22\text{-}3)$$

هناك على الأقل صياغتان تقرآن في هذه المعادلة: **الأولى** التناغم العكسي بين مقدار شدة المجال الكهربائي بالقرب من سطح موصل ونصف قطر تكور ذلك الجزء من سطح الموصل المشحون. إذ تكون شدة المجال الكهربائي خارج الرأس المدبب عالية جداً مما يستدعي ظاهرة تأين الهواء وحدوث التفريغ الكهربائي عند الرؤوس المدببة للموصل المشحون. وهذا هو مبدأ عمل مانعة الصواعق. أما **الثانية** التناغم الطردي بين مقدار الجهد الكهربائي كدالة لنصف قطر الموصل المشحون. لهذا السبب تجعل الكرة كبيرة في مولد فان دي كراف وذلك لزيادة الجهد الذي يمكن الحصول عليه من هذا المولد.

الآن لنفترض أن لدينا جسماً موصلاً مشحوناً ذا رأس مدبب وان يكون هذا الجسم مكافئٌ لكرة موصلة صغيرة هي بمثابة الرأس المدبب من الجسم وتوصل بواسطة سلك دقيق وطويل مع كرة أخرى كبيرة هي بمثابة المناطق الأخرى من الجسم الموصل كما في الشكل $(3-11)$. فإذا كان نصف قطر الكرة الصغيرة r وشحنتها q، ونصف قطر الكرة الكبيرة R وشحنتها Q وان جهديهما متساويان لأنهما متصلان مع بعضهما بسلك موصل، عندئذ:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots..(23\text{-}3)$$

أن كثافة الشحنة السطحية σ تمثل مقدار الشحنة لوحدة المساحة وعليه فان:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{للكرة الصغيرة}\\ \sigma_R&=\frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{للكرة الكبيرة}\end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots..(24\text{-}3)$$

ومن العلاقتين $(3-23)$ و $(3-24)$ يكون لدينا:

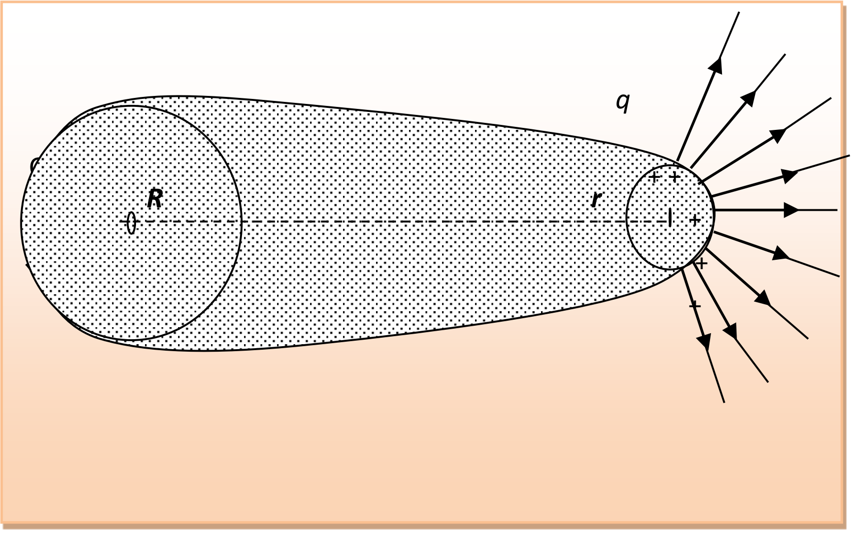
$$\sigma_r r=\sigma_R R$$

$$\therefore \frac{\sigma_r}{\sigma_R}=\frac{R}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots. (25\text{-}3)$$

الآن لو نظرنا إلى المعادلة $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ يمكننا كتابة المعادلة $(3-25)$ بشكل آخر، أي:

$$\frac{E_r}{E_R}=\frac{R}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots..(26\text{-}3)$$

وهذا يدل على إن مقدار شدة المجال الكهربائي بالقرب من سطح موصل يتناسب عكسياً مع نصف قطر التكور. ومن تطبيقاتها هو أن هذا المجال يؤثر على الايونات القليلة الموجودة في الهواء ويجعلها تنجذب (أو تتنافر) نحو الرأس المدبب بتعجيل كبير. ونتيجة لاصطدام الايونات بجزيئات الهواء ينتج المزيد من الايونات، وبهذا يصبح الهواء أكثر توصيلاً للكهربائية وتتسرب شحنة الموصل عن طريق الرأس المدبب بمعدلٍ عالٍ.

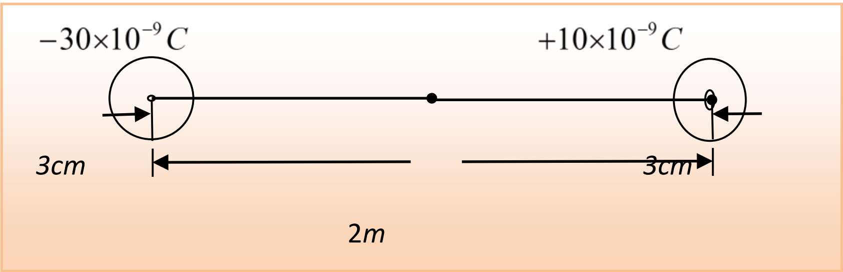


مثـــــال (3-)

يبين الشكل (3-12) كرتين موصلتين متماثلتين نصف قطر كل منهما $3cm$ تحملان شحنتين مقدارهما $-30\times10^{-9}C$ و $+10\times10^{-9}C$. المسافة بين مركزيهما $2m$. احسب: 1- الجهد عند منتصف المسافة بين الكرتين ، 2- جهد كل من الكرتين.

الحل:

إن جهد كل كرة ينشأ عن شحنة الكرة ذاتها وعن شحنة الكرة الأخرى التي تبعد عنها بمسافة مقدارها $2m$.



-1 $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

$$V_1 = 9\times10^9\left(\frac{-30\times10^{-9}}{1}+\frac{10^{-8}}{2}\right)$$

$$V_1 = 9\times10^9\left(\frac{-60\times10^{-9}+10^{-8}}{2}\right)=\frac{-540+90}{2}=-225\ V$$

$$V_2 = 9\times10^9\left(\frac{10^{-8}}{1}+\frac{-30\times10^{-9}}{2}\right)$$

$$V_2 = 9\times10^9\left(\frac{2\times10^{-8}-30\times10^{-9}}{2}\right)=\frac{180-270}{2}=-45\ V$$

عندئذ يصبح الجهد عند منتصف المسافة بين الكرتين (اعتدنا تسميته فرق الجهد):

$$V_1 - V_2 = -225-(-45) = -180\,V$$

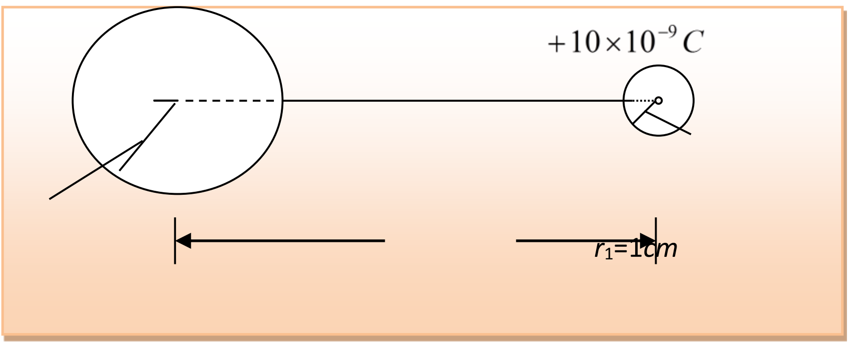
-2 جهد الكرة (1) يساوي الجهد الناشئ عن شحنة الكرة ذاتها زائداً الجهد الناشئ عن شحنة الكرة (2) عند بعد قدره $2m$ عنها، لذا :

$$V_1 = 9\times10^9\left(\frac{-30\times10^{-9}}{3\times10^{-2}}+\frac{10^{-8}}{2}\right)=-8955\ V$$

$$V_2 = 9\times10^9\left(\frac{10^{-8}}{3\times10^{-2}}+\frac{-30\times10^{-9}}{2}\right)=+286\ V$$

مثال (12-3)

في الشكل (13-3) شحنت الكرة الصغيرة بشحنة $+10\times10^{-9}C$، وبعد ذلك وصِّلت بالكرة الكبيرة بسلك موصل دقيق. فإذا علمت أن المسافة بين مركزي الكرتين $50cm$. احسب: الشحنة التي تحصل عليها كل من الكرتين وجهد كل منهما.



الحل:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

حيث q_1 تمثل الشحنة التي استقرت على الكرة الصغيرة و q_2 الشحنة التي استقرت على الكرة الكبيرة بعد أن وصّلتا بالسلك الدقيق. وقد أهملت الشحنة التي استقرت على السلك الموصل لضآلتها، لكن جهد الكرتين يتساوى بعد أن يتصلان، لذا :

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{10^{-2}} = \frac{q_2}{10^{-1}}$$

$$10^2 q_1 = 10 q_2 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0.1 q_2$$

أو

$$q_2 = 10 q_1$$

لكن

$$q_1 + q_2 = 10\times 10^{-9}$$

$$q_1 + 10 q_1 = 10\times 10^{-9}$$

$$11 q_1 = 10\times 10^{-9}$$

$$q_1 = \frac{10}{11}\times 10^{-9} = 91\times 10^{-11} C \qquad \text{و} \qquad q_2 = 10\times 91\times 10^{-11} = 91\times 10^{-10}$$

نعود للمعادلة $(3-20)$ ونحسب جهد كل من الكرتين :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

$$\therefore V_1 = V_2 = 9\times 10^9 \times \frac{91\times 10^{-11}}{10^{-2}} = 819 V$$

(3–8) متساويات الجهد Equipotentials

نعود إلى البند $(3-6)$ ونستحضر المعادلة $(3-18)$، نلاحظ انه في الحالة التي يكون فيها اتجاه المجال الكهربائي عمودياً على مسار حركة الشحنة تكون قيمة مركبة شدة المجال باتجاه المسار مساوية إلى الصفر ، وعليه فان:

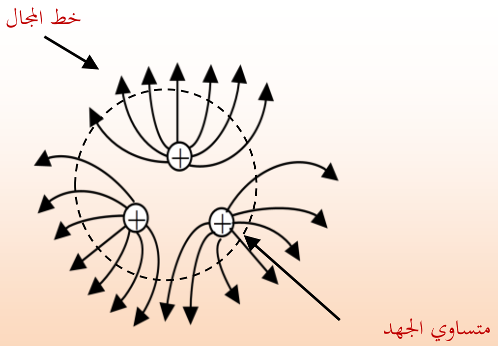
$$\frac{dV}{dr} = 0$$

أي أن الجهد الكهربائي يبقى ثابتاً لجمع نقاط المسار. ويطلق على هذا المسار بخط تساوي الجهد، والسطح الذي يكون جميع نقاطه متساوية الجهد بسطح تساوي الجهد.

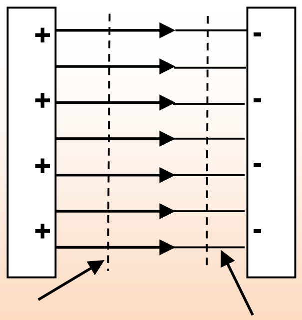
لنعود إلى البند الأول ونبحث الموضوع بتبسيط أكثر مما في المعادلة $(1-9)$:

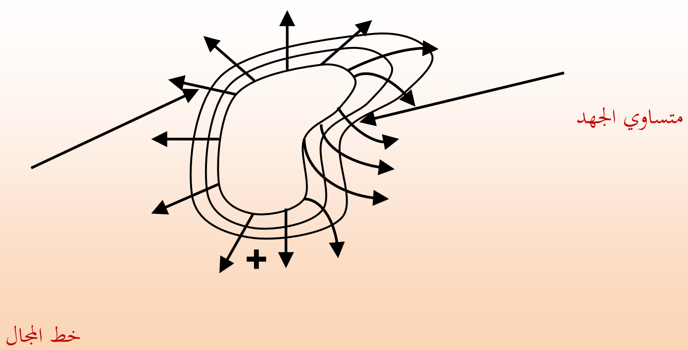
$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

و نتساءل متى يكون جهد النقطة A مساوياً لجهد النقطة B أو أي نقطة على الخط الواصل بين هاتين النقطتين. والجواب هو عندما لا تكون هناك حاجة لبذل أي شغل لتحريك شحنة الاختبار q_0 على طول الخط الواصل بين النقطتين. وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت الحركة باتجاه متعامد مع المجال الكهربائي. نستدل من هذه المناقشة أن سطوح تساوي الجهد تكون عمودية على المجال، فلو لم تكن كذلك لكان هناك مركبة لشدة المجال موازية للسطح وعندئذ يتوجب إنجاز شغل عند نقل شحنة اختبارية على السطح وهذا خلاف الواقع .وتبين الأشكال الآتية بعض من سطوح تساوي الجهد.

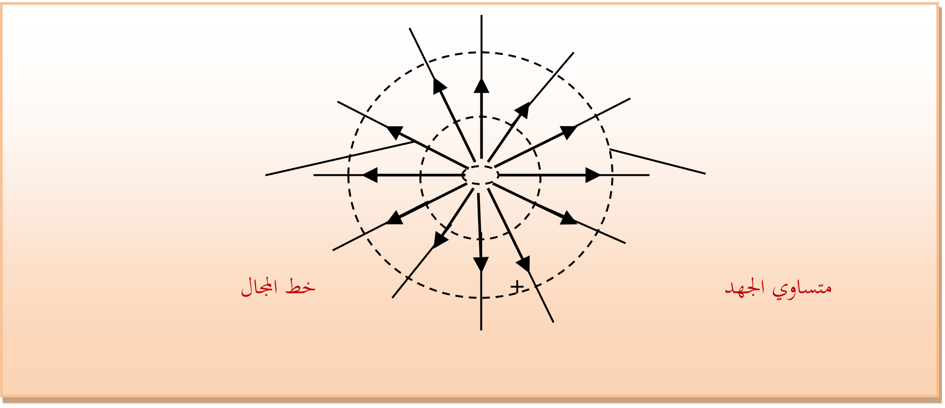


الشكل(3–12):متساويات الجهد متعامدة مع خطوط المجال لوسط يحيط بثلاث



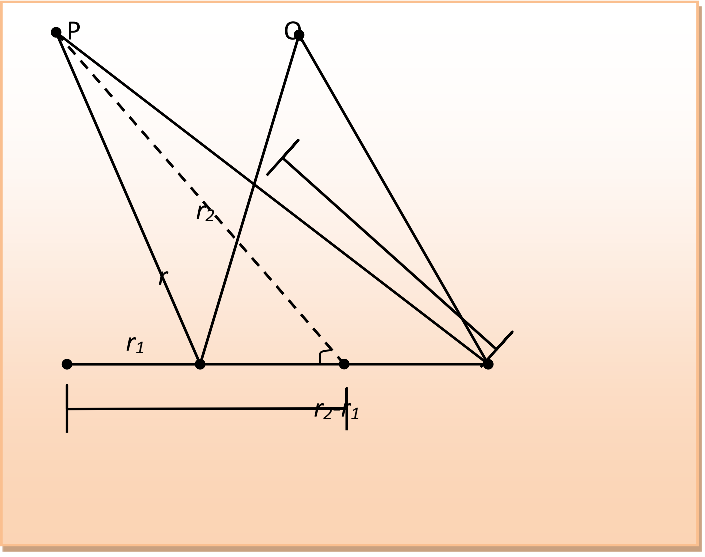


الآن لو فرضنا أن الجسم في الشكل (3−15) يرصد من مسافة بعيدة حتى يبدو كنقطة صغيرة. عندئذ تكون خطوط المجال شعاعيه وتكون متساويات الجهد دوائر كما يدل عليه الشكل.



(5–3) جهد ثنائي القطب الكهربائي Potential Electric Dipole

يمثل الشكل (3–7) ثنائي قطب كهربائي متكون من شحنة موجبة $+q$ وأخرى سالبة $-q$ تفصلهما مسافة $2a$ والمطلوب إيجاد قيمة الجهد الكهربائي الناشئ عن الشحنتين $+q$ و $-q$ عند النقاط N و P و Q.



عند النقطة N الواقعة على امتداد محور ثنائي القطب نحو اليسار وتبعد مسافة r عن مركزه نجد إن الجهد الكهربائي للشحنة $+q$ و $-q$ على التتالي يكون:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r-a}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{r+a}$$

لذلك فان الجهد الكلي V لكلتا الشحنتين يساوي المجموع الجبري لجهديهما، أي :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-a} - \frac{q}{r+a}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(r+a)-(r-a)}{r^2-a^2}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{r^2-a^2} \qquad \text{.........(13-3)}$$

وفي الحالات التي تكون فيها النقطة N على مسافة بعيدة من مركز ثنائي القطب أي ($r>>2a$) يمكن إهمال a^2 بالنسبة للمقدار r^2 ، عندئذ:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2} \qquad \text{………... (14-3)}$$

إذ أن $p = 2qa$ ترمز لعزم ثنائي القطب الكهربائي.

** أما الجهد الكهربائي عند النقطة P التي حدد موقعها بالإحداثيات القطبية r و θ (الشكل 3−7) فيمكن إيجاده بنفس الأسلوب، أي الجهد عند p للشحنة $+q$ يكون:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

أما الجهد عند نفس النقطة للشحنة $-q$ يكون:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_2}$$

لذلك فان الجهد الكلي V لكلتا الشحنتين يساوي المجموع الجبري لجهديهما ،أي:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \qquad \text{……...(15-3)}$$

وللحالات التي يكون فيها بعد النقطة p كبيراً بالنسبة لـ$2a$ أي ($r >> 2a$) يكون:

$$r_1 r_2 \cong r^2$$

$$r_2 - r_1 = 2a\cos\theta$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة (3−15) نحصل على:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} \qquad \text{……..(16-3)}$$

نجد من المعادلة (3−16) تحقيقٌ لنتيجة الجهد عند النقطة N في الحالة التي تكون على مسافة بعيدة من مركز ثنائي القطب، والتي عندها من المفترض أن تكون قيمة θ تساوي صفراً، أي cosθ=1 فعند تعويض هذه النتيجة في المعادلة (3−16) نحصل على نفس الصيغة التي حصلنا عليها في المعادلة (3−14). كما نجد من المعادلة (3−16) أن الجهد يساوي صفراً عند جميع النقاط الواقعة على الخط العمودي المقام من منتصف المسافة بين شحنتي ثنائي القطب أي عندما تكون الزاوية θ تساوي 90.

(6–3) حساب شدة المجال الكهربائي من الجهد الكهربائي

Calculation of Electric Field from Electric Potential

من المعلوم أن شدة المجال الكهربائي كمية اتجاهية وان حساب قيمتها بطريقة التكامل مباشرةً باستعمال المعادلة (2–11) أمر غير سهل. وطالما أن الجهد الكهربائي كمية غير اتجاهية ، لذا فمن الضروري أن يكون حساب شدة المجال عن طريق حساب الجهد يعد طريقة أسهل من حسابه بطريقة التكامل بصورة مباشرة. لاحظنا في البند (3–2) أن هناك علاقة بين شدة المجال E وفرق الجهد ΔV ممثلة في المعادلة (3–4) وهي:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dr$$

الآن يمكن حساب E إذا كان الجهد الكهربائي معروفاً في منطقة ما بالتعبير عن فرق الجهد dV بين نقطتين المسافة بينهما متناهية في الصغر dr بالشكل الآتي:

$$dV = -E\cos\theta dr \qquad \text{..........(17-3)}$$

حيث $E\cos\theta$ تمثل مركبة شدة المجال الكهربائي باتجاه dr، وان θ هي الزاوية المحصورة بين اتجاه $\vec{E}$ وعنصر المسافة dr. في الحالة التي تكون فيها الكمية $E\cos\theta$ باتجاه dr فان θ=0 عندئذ يمكن كتابة المعادلة (3–17) كالآتي :

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \qquad \text{........... (18-3)}$$

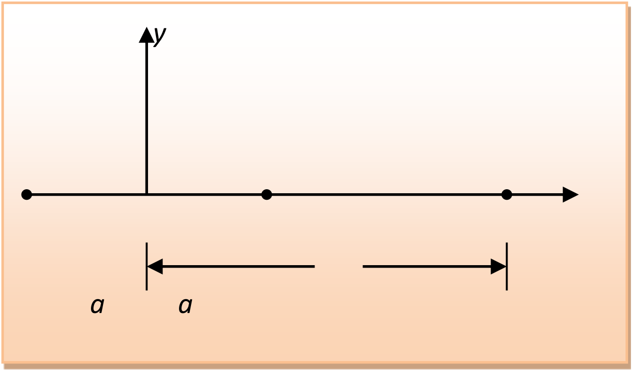
وهذه هي قيمة مركبة شدة المجال الكهربائي باتجاه المسافة dr ، أما الإشارة السالبة فهي تدل على إن اتجاه E هي باتجاه تناقص الجهد.أما إذا كان V متغيراً في أكثر من اتجاه مثل x و y و z فيمكن عندئذ إعادة كتابة المعادلة (3–18) في هذه الاتجاهات كالآتي :

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \text{.........(19-3)}$$

من المناقشة التي بنيت على أساس المعادلة (3–4) نجد أن الجهد الكهربائي يبقى ثابتاً لجميع نقاط المسار إذا كان عمودياً على المجال الكهربائي وسنأتي إليه في البند القادم.

مثال (3−9)

ثنائي قطب كهربائي يتكون من شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة تفصلهما مسافة $2a$ (شكل3−8). احسب:1− الجهد الكهربائي V عند النقطة p، 2− الجهد الكهربائي V وشدة المجال الكهربائي E_x عند نقطة بعيدة عن ثنائي القطب، 3− الجهد الكهربائي V وشدة المجال الكهربائي E_x إذا كانت p واقعة بين الشحنتين.



الحل:

1− الجهد الكهربائي عند النقطة p يكون:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{+q}{x-a} + \frac{-q}{x+a}\right)$$

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2 - a^2}$$

2− إذا كانت النقطة p بعيدة عن ثنائي القطب $(x>>a)$ عندئذ تهمل a^2:

$$\therefore V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2}$$

وباستعمال المعادلة (9−18) ونتيجة الجهد أعلاه يمكن حساب E_x كما يأتي :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^2}\right) = -\left(\frac{-2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^3}\right)$$

$$\therefore E_x = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{qa}{x^3}$$

3− في الحالة التي تكون بها p واقعة بين الشحنتين فان V و E_x تحسبان كما يأتي :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a-x} - \frac{q}{a+x}\right)$$

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{a^2 - x^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{a^2 - x^2}\right)$$

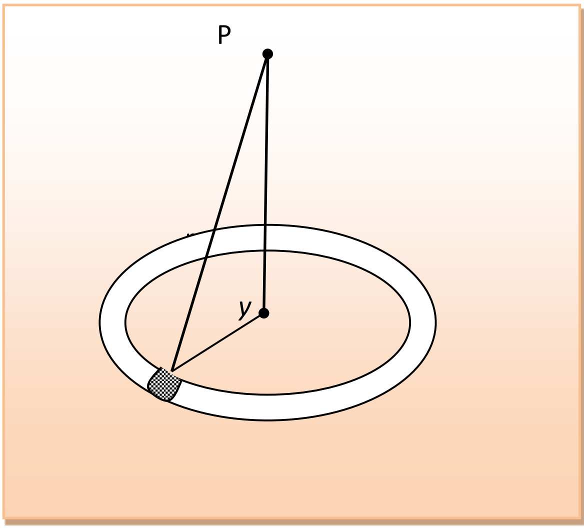
$$\therefore E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-x^2 - a^2}{(a^2 - x^2)^2}$$

مثال (3–10)

شحنة موجبة مقدارها q موزعة بانتظام على شكل حلقة نصف قطرها a كما مبين في الشكل (3–9). احسب : 1– الجهد الناشئ عن الحلقة عند نقطة مثل p واقعة على محور الحلقة وعلى مسافة y من مركزها، 2– شدة المجال الكهربائي عند النقطة p .

الحل:

نقسّم الحلقة إلى عناصر تفاضلية تبعد جميعها بمسافات متساوية عن النقطة p المراد إيجاد الجهد عندها. ثم نأخذ احد هذه العناصر الذي تبلغ قيمة شحنته dq ونعتبرها بمثابة شحنة نقطية تبعد مسافة r عن النقطة p.



1– بتطبيق المعادلة (3–10) يمكن أن نجد مقدار الجهد الناشئ عن هذا العنصر وكما يأتي :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

بإجراء التكامل لكل من طرفي المعادلة نحصل على قيمة الجهد عند النقطة p:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + y^2}}\int dq$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

2- واضح من تناظر الشكل أن المجال الكهربائي يكون باتجاه محور الحلقة y لذا بالإمكان الحصول على E عند p بالاستفادة من المعادلة (3-18)، أي أن:

$$E = E_y = -\frac{dV}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

يبدو أن هذه النتيجة تتفق تماماً مع النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة التكامل بصورة مباشرة في البند (2-5) من الفصل الثاني المعادلة (2-18).

(3-7) جهد جسم كروي موصل مشحون
Potential of Spherical Body Charged Conductor

نعود الآن إلى علاقة الجهد الكهربائي عند أي نقطة على مسافة r في مجال شحنة نقطية q والمتمثلة بالمعادلة (3-8) وهي :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

ولابد أن نتذكر بان هذه المعادلة يصح تطبيقها في أية نقطة واقعة خارج جسم كروي موصل ولإيجاد قيمة الجهد الكهربائي عند جميع النقاط الواقعة داخل موصل كروي نصف قطره R ، والبرهنة على أنها متساوية في الجهد وتساوي قيمة الجهد على سطحه نفترض أن النقطة B تمثل أي نقطة على سطح كرة موصلة بينما النقطة A في داخل الكرة.

من الأدبيات المعروفة إن شدة المجال الكهربائي داخل الموصل يساوي صفراً، لذا طبقاً للمعادلة (9-4) نجد أن فرق الجهد بين النقطتين A و B يصبح:

$$V_B - V_A = -\int_A^B E\cos\theta dr = 0 \qquad \therefore V_B = V_A$$

هذا يعني إن الجهد عند أي نقطة على سطح كرة موصلة مثل B يساوي الجهد عند النقطة A في داخل الكرة. وبكلام آخر فان قيمة الجهد عند جميع النقاط الواقعة داخل كرة موصلة تكون متساوية وتساوي قيمة الجهد على سطحه.

لنعود الآن إلى الشكل (3-3) ونتخيل كرة موصلة مشحونة بـ$+q$ بدلاً من الشحنة النقطية $+q$ وان النقطة B تقع على سطح الكرة التي تبعد r_B عن مركزها. فباستعمال المعادلة (3-7) نستطيع أن نجد فرق الجهد بين النقطتين A و B :

$$V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

وبنفس الطريقة نحصل على علاقة خاصة للجهد الكهربائي عند النقطة B الواقعة على سطح الكرة الموصلة بعد فرض إن الجهد عند النقطة A يساوي صفراً في المالانهاية:

$$V_B - 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$\therefore V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}$$

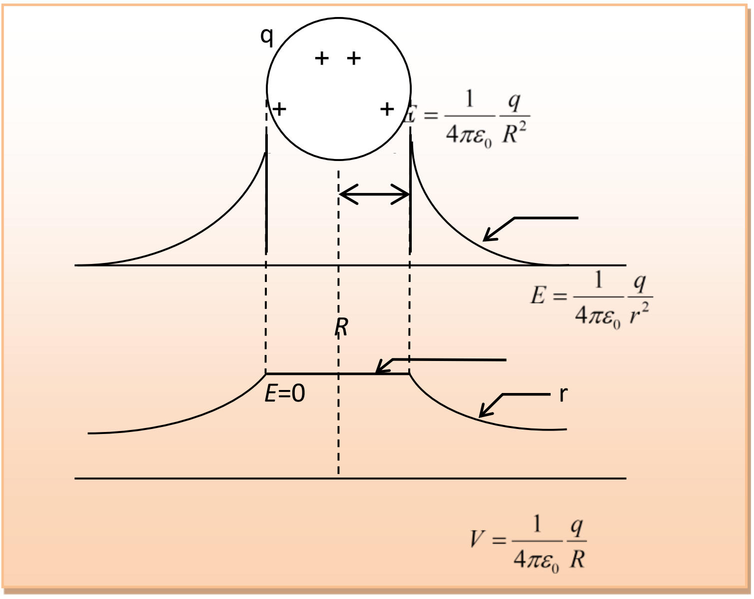
وبالتعويض عن r_B بـR نحصل على :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots(20\text{-}3)$$

إن الجهد عند أي نقطة واقعة خارج جسم كروي موصل وعلى بعد r من مركزه هو:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

يبيّن الشكل (3–10) توزيع كل من مقدار شدة المجال الكهربائي والجهد داخل كرة موصلة وخارجها نصف قطرها R ومشحونة بشحنة موجبة مقدارها $+q$.



إن مقدار شدة المجال الكهربائي على سطح الكرة الموصلة يساوي:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(21\text{-}3) \qquad \therefore V = RE$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots(22\text{-}3)$$

هناك على الأقل صياغتان تقرآن في هذه المعادلة: **الأولى** التناغم العكسي بين مقدار شدة المجال الكهربائي بالقرب من سطح موصل ونصف قطر تكور ذلك الجزء من سطح الموصل المشحون. إذ تكون شدة المجال الكهربائي خارج الرأس المدبب عالية جداً مما يستدعي ظاهرة تأين الهواء وحدوث التفريغ الكهربائي عند الرؤوس المدببة للموصل المشحون. وهذا هو مبدأ عمل مانعة الصواعق. أما **الثانية** التناغم الطردي بين مقدار الجهد الكهربائي كدالة لنصف قطر الموصل المشحون. لهذا السبب تجعل الكرة كبيرة في مولد فان دي كراف وذلك لزيادة الجهد الذي يمكن الحصول عليه من هذا المولد.

الآن لنفترض أن لدينا جسماً موصلاً مشحوناً ذا رأس مدبب وان يكون هذا الجسم مكافئٌ لكرة موصلة صغيرة هي بمثابة الرأس المدبب من الجسم وتوصل بواسطة سلك دقيق وطويل مع كرة أخرى كبيرة هي بمثابة المناطق الأخرى من الجسم الموصل كما في الشكل $(3-11)$. فإذا كان نصف قطر الكرة الصغيرة r وشحنتها q، ونصف قطر الكرة الكبيرة R وشحنتها Q وان جهديهما متساويان لأنهما متصلان مع بعضهما بسلك موصل، عندئذ:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(23\text{-}3)$$

أن كثافة الشحنة السطحية σ تمثل مقدار الشحنة لوحدة المساحة وعليه فان:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{للكرة الصغيرة} \\ \sigma_R &= \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{للكرة الكبيرة} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(24\text{-}3)$$

ومن العلاقتين $(3-23)$ و $(3-24)$ يكون لدينا:

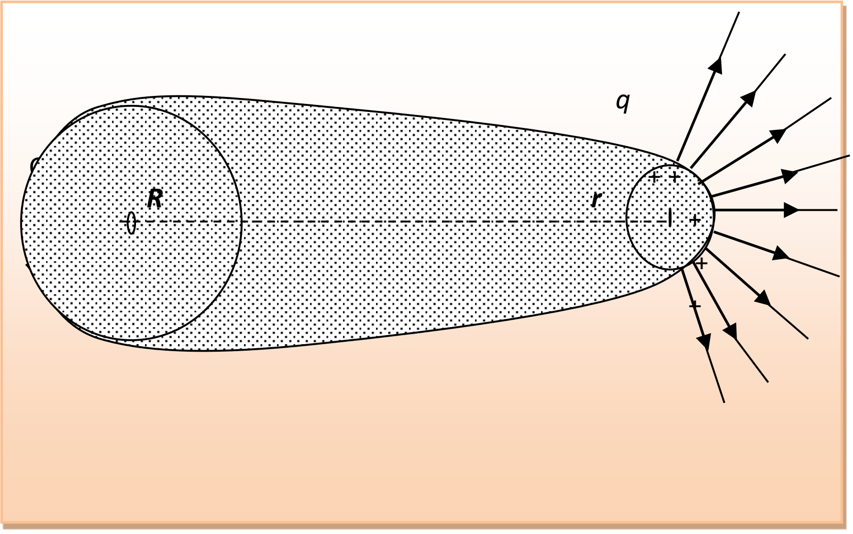
$$\sigma_r r = \sigma_R R$$

$$\therefore \frac{\sigma_r}{\sigma_R} = \frac{R}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(25\text{-}3)$$

الآن لو نظرنا إلى المعادلة $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ يمكننا كتابة المعادلة $(3-25)$ بشكل آخر، أي:

$$\frac{E_r}{E_R} = \frac{R}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(26\text{-}3)$$

وهذا يدل على إن مقدار شدة المجال الكهربائي بالقرب من سطح موصل يتناسب عكسياً مع نصف قطر التكور. ومن تطبيقاتها هو أن هذا المجال يؤثر على الايونات القليلة الموجودة في الهواء ويجعلها تنجذب (أو تتنافر) نحو الرأس المدبب بتعجيل كبير. ونتيجة لاصطدام الايونات بجزيئات الهواء ينتج المزيد من الايونات، وبهذا يصبح الهواء أكثر توصيلاً للكهربائية وتتسرب شحنة الموصل عن طريق الرأس المدبب بمعدلٍ عالٍ.

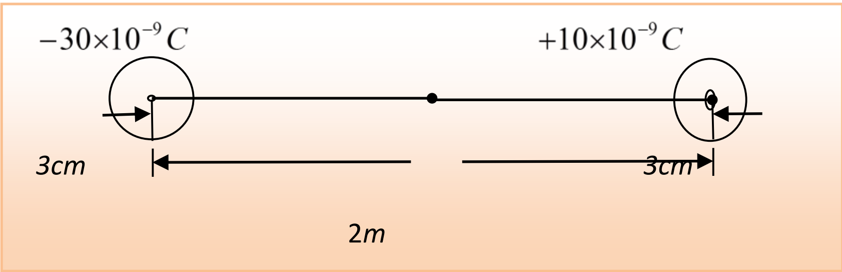


مثـــال (3-

يبين الشكل (3-12) كرتين موصلتين متماثلتين نصف قطر كل منهما $3cm$ تحملان شحنتين مقدارهما $-30\times10^{-9}C$ و $+10\times10^{-9}C$. المسافة بين مركزيهما $2m$. احسب:1- الجهد عند منتصف المسافة بين الكرتين ، 2- جهد كل من الكرتين.

الحل:

إن جهد كل كرة ينشأ عن شحنة الكرة ذاتها وعن شحنة الكرة الأخرى التي تبعد عنها بمسافة مقدارها $2m$.



1-

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V_1=9\times10^9\left(\frac{-30\times10^{-9}}{1}+\frac{10^{-8}}{2}\right)$$

$$V_1=9\times10^9\left(\frac{-60\times10^{-9}+10^{-8}}{2}\right)=\frac{-540+90}{2}=-225\ V$$

$$V_2=9\times10^9\left(\frac{10^{-8}}{1}+\frac{-30\times10^{-9}}{2}\right)$$

$$V_2=9\times10^9\left(\frac{2\times10^{-8}-30\times10^{-9}}{2}\right)=\frac{180-270}{2}=-45\ V$$

عندئذ يصبح الجهد عند منتصف المسافة بين الكرتين (اعتدنا تسميته فرق الجهد):

$$V_1-V_2=-225-(-45)=-180\,V$$

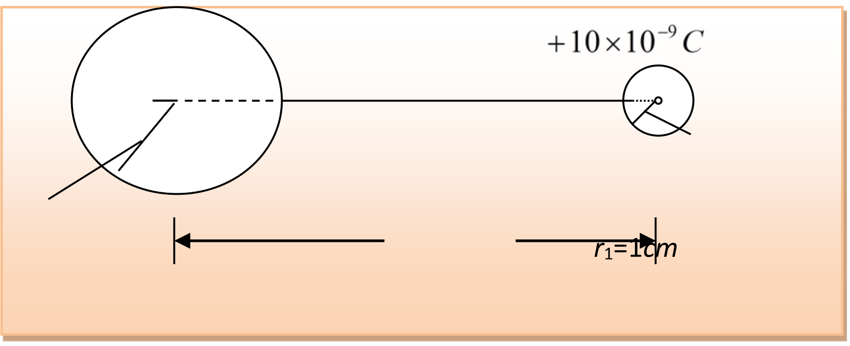
2- جهد الكرة (1) يساوي الجهد الناشئ عن شحنة الكرة ذاتها زائداً الجهد الناشئ عن شحنة الكرة (2) عند بعد قدره $2m$ عنها، لذا :

$$V_1=9\times10^9\left(\frac{-30\times10^{-9}}{3\times10^{-2}}+\frac{10^{-8}}{2}\right)=-8955\ V$$

$$V_2=9\times10^9\left(\frac{10^{-8}}{3\times10^{-2}}+\frac{-30\times10^{-9}}{2}\right)=+286\ V$$

مثال (3-12)

في الشكل (3-13) شحنت الكرة الصغيرة بشحنة $+10\times10^{-9}C$، وبعد ذلك وصِّلت بالكرة الكبيرة بسلك موصل دقيق. فإذا علمت أن المسافة بين مركزي الكرتين $50cm$. احسب: الشحنة التي تحصل عليها كل من الكرتين وجهد كل منهما.



الحل:

$$V_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$

حيث q_1 تمثل الشحنة التي استقرت على الكرة الصغيرة و q_2 الشحنة التي استقرت على الكرة الكبيرة بعد أن وصّلتا بالسلك الدقيق. وقد أهملت الشحنة التي استقرت على السلك الموصل لضآلتها، لكن جهد الكرتين يتساوى بعد أن يتصلان، لذا :

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{10^{-2}} = \frac{q_2}{10^{-1}}$$

$$10^2 q_1 = 10 q_2 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0.1 q_2$$

أو

$$q_2 = 10 q_1$$

لكن

$$q_1 + q_2 = 10\times10^{-9}$$

$$q_1 + 10 q_1 = 10\times10^{-9}$$

$$11 q_1 = 10\times10^{-9}$$

$$q_1 = \frac{10}{11}\times10^{-9} = 91\times10^{-11} C \qquad \text{و} \qquad q_2 = 10\times91\times10^{-11} = 91\times10^{-10}$$

نعود للمعادلة $(3-20)$ ونحسب جهد كل من الكرتين :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

$$\therefore V_1 = V_2 = 9\times10^9 \times \frac{91\times10^{-11}}{10^{-2}} = 819 V$$

(8–3) متساويات الجهد Equipotentials

نعود إلى البند (3–6) ونستحضر المعادلة (3–18)، نلاحظ انه في الحالة التي يكون فيها اتجاه المجال الكهربائي عمودياً على مسار حركة الشحنة تكون قيمة مركبة شدة المجال باتجاه المسار مساوية إلى الصفر، وعليه فان:

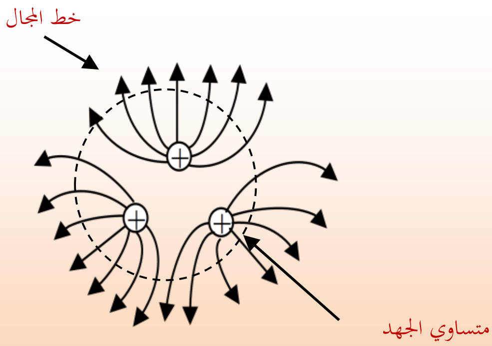
$$\frac{dV}{dr} = 0$$

أي أن الجهد الكهربائي يبقى ثابتاً لجمع نقاط المسار. ويطلق على هذا المسار بخط تساوي الجهد، والسطح الذي يكون جميع نقاطه متساوية الجهد بسطح تساوي الجهد.

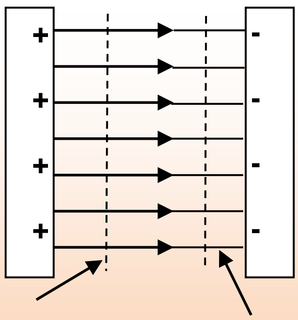
لنعود إلى البند الأول ونبحث الموضوع بتبسيط أكثر مما في المعادلة (9–1) :

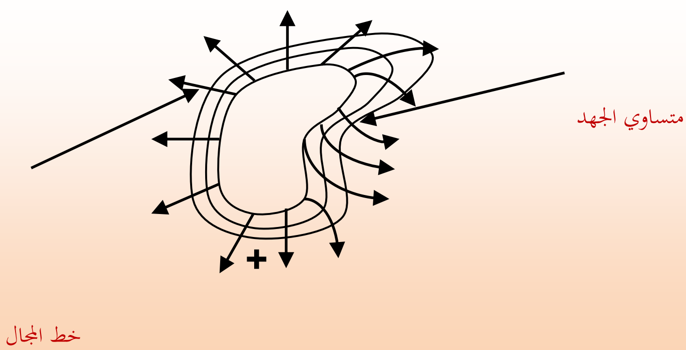
$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0}$$

و نتساءل متى يكون جهد النقطة A مساوياً لجهد النقطة B أو أي نقطة على الخط الواصل بين هاتين النقطتين. والجواب هو عندما لا تكون هناك حاجة لبذل أي شغل لتحريك شحنة الاختبار q_0 على طول الخط الواصل بين النقطتين. وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت الحركة باتجاه متعامد مع المجال الكهربائي. نستدل من هذه المناقشة أن سطوح تساوي الجهد تكون عمودية على المجال، فلو لم تكن كذلك لكان هناك مركبة لشدة المجال موازية للسطح وعندئذ يتوجب إنجاز شغل عند نقل شحنة اختبارية على السطح وهذا خلاف الواقع .وتبين الأشكال الآتية بعض من سطوح تساوي الجهد.

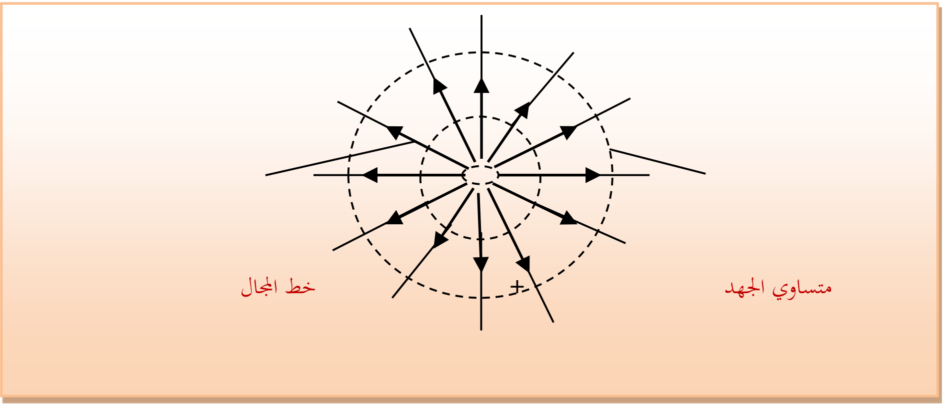


الشكل(3-12):متساويات الجهد متعامدة مع خطوط المجال لوسط يحيط بثلاث





الآن لو فرضنا أن الجسم في الشكل (3−15) يرصد من مسافة بعيدة حتى يبدو كنقطة صغيرة. عندئذ تكون خطوط المجال شعاعيه وتكون متساويات الجهد دوائر كما يدل عليه الشكل.



السعة الكهربائية والمتسعات (المكثّفات)(Electric Capacitance and Capacitors (Capacitors

1-4 السعة الكهربائية (Electric Capacitance)

إن الجهد الكهربائي لموصّل كروي معزول في الفراغ هو :

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R} \ldots (1-15)}$$

حيث أن (q) هي الشحنة الموضوعة على الجسم الكروي الذي نصف قطره (R) ، ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي :

$$q = (4\pi\varepsilon_o R)V$$

حيث يتضح أن الشحنة التي يحملها الموصّل الكهربائي تتناسب طرديا مع جهده الكهربائي ، وقد أثبتت التجارب أن هذه النتيجة تنطبق على كافة الموصّلات المشحونة مهما كانت أشكالها .

من ذلك يتبين أنه يمكن زيادة الشحنة الموضوعة على أي موصل فيرتفع بذلك جهده ، ولكن هذه الزيادة إن استمرت فإنها ستؤدي إلى إرتفاع الجهد إلى الحد الذي يحدث عنده التفريغ الكهربائي .

أما مقدار الزيادة في الشحنة التي توضع على الموصّل والتي تسبب زيادة معينة في جهده فإنها تعتمد على شكل الموصّل وحجمه كما تعتمد على الموصّلات المشحونة الأخرى المتواجدة في المنطقة المجاورة ، بمعنى آخر أن الشحنة التي توضع على الموصّل تعتمد على كل من جهده وسعته الكهربائية .

تعرّف سعة الموصّل بأنها كمية الشحنة التي يحملها الموصّل إلى جهده الكهربائي ، أي أن :

$$\boxed{C = \frac{q}{V} \ldots (2-15)}$$

ومن المعادلتين (15 – 1) و (15 – 2) نجد أن السعة لكرة موصّلة معزولة في الفراغ هي :

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_o R \ldots (3-15)}$$

ويظهر من تعريف السعة أن وحدتها هي (كولوم / فولت) وتسمى (فاراد Farad) نسبة إلى العالم المعروف (Michael Farad) الذي ساهم في تطوير مفهوم السعة الكهربائية .

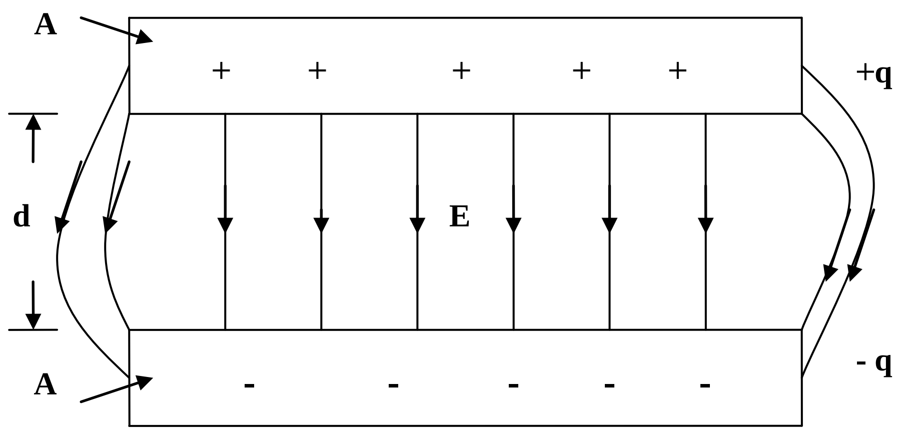
وبما أن الفاراد هي وحدة كبيرة نسبيا من الناحية العملية فهناك وحدات أخرى للسعة أكثر ملائمة وهي المايكروفاراد ($1\mu F = 10^{-6}\,Farad$) ويمثل واحد من مليون من الفاراد ، وكذلك البيكوفاراد ($1pF = 10^{-12}\,Farad$) ويمثل واحد من مليون من مليون من الفاراد .

2-4 المتسعات (المكثّفات) الكهربائية (Electric Capacitors)

تعرّف السعة الكهربائية (C) لأي متسعة بأنها النسبة بين شحنة المتسعة (q) إلى فرق الجهد بين الموصّلين المكوّنين لها (V) ، ونقصد هنا بشحنة المتسعة مقدار الشحنة التي يحملها أي من الموصّلين ذلك أن المجموع الكلي لشحنة المتسعة على كلا الموصّلين يساوي صفرا (لأنهما شحنتان متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الإشارة) ، وتعتمد قيمة الشحنة على الشكل الهندسي للموصّلين وعلى البعد بينهما كذلك على الوسط العازل بينهما .

تعتبر المتسعات من العناصر الأساسية في الدوائر الكهربائية فهي تستخدم لتقويم ذبذبات التيار الكهربائي وتوليد الموجات الكهرومغناطيسية أو الكشف عنها ولخزن الطاقة الكهرومغناطيسية وغيرها من الإستخدامات الكثيرة التي تدخل في تكوين الأجهزة الإلكترونية .

من أشهر المتسعات تلك التي تعرف بإسم المتسعة ذات اللوحين (الصفيحتين) المتوازيين (المتوازيتين) (The Parallel Plate Capacitors) وتتكوّن هذه المتسعة من لوحين موصّلين متوازيين بينهما طبقة رقيقة من مادة عازلة أو فراغ ، ويتم شحن المتسعة بأن يربط اللوحين إلى قطبي بطارية كهربائية فيكتسب اللوح المتصل بالقطب الموجب شحنة موجبة ، أما اللوح الآخر فيكتسب شحنة سالبة مساوية في مقدارها الشحنة الموجبة ، والشكل (4 – 1) يبيّن متسعة من هذا النوع .



شكل (4 – 1) : متسعة ذات لوحين متوازيين

يلاحظ من الشكل (4 – 1) أن **مساحة كل لوح من لوحي المتسعة هي (A)** ويفصلها فراغ ، وإذا كانت **المسافة بين اللوحين (d)** صغيرة بالمقارنة مع أبعاد اللوحين فإن المجال الكهربائي بين اللوحين يمكن إعتباره منتظما وبذلك تكون خطوط القوة الكهربائية متوازية ومتساوية البعد عن بعضها البعض (عدا المنطقة المحيطة بحافات اللوحين حيث تكون الخطوط منحنية والمجال غير منتظم) .

إن مقدار شدة المجال الكهربائي بين لوحين متوازيين هو :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{q}{\varepsilon_o A} ...(4-15)}$$

حيث أن :

σ : الكثافة السطحية للشحنة الموجودة على سطح الموصّل .

ε_o : السماحية الكهربائية للوسط (Electric Permeability) ويساوي ($8.85x10^{-12} C^2 / N.m^2$) .

وبما أن المجال بين اللوحين منتظم فإن فرق الجهد بينهما هو :

$$\boxed{V = Ed = \frac{q}{\varepsilon_o A}.d...(5-15)}$$

وبما أن :

$$C = \frac{q}{V}$$

لذا فإن سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين تصبح :

$$\boxed{C = \varepsilon_o \frac{A}{d}...(6-15)}$$

من المعادلة (15 – 6) يتبين بأن السعة مقدار ثابت لمتسعة معينة لا تعتمد على شحنة المتسعة بل تتناسب طرديا مع مساحة اللوحين (A) ، وعكسيا مع المسافة بينهما (d) .

مثال 1 : ما مقدار شحنة متسعة سعته ($300\ pF$) عندما يشحن حتى يصل جهده إلى ($1kV$) ؟

الحل :

$$C = \frac{q}{V}...(2-15)$$

$$q = CV$$

$$q = (300x10^{-12} F)(1000V)$$

$$\boxed{q = 3x10^{-7} C = 0.3\mu C}$$

مثال 2 : كرة معدنية موضوعة على قضيب عازل يحمل شحنة ($6nC$) عندما يكون جهده أعلى من الوسط المحيط بمقدار ($200V$) . ما هي سعة المتسعة المكوّن من الكرة والوسط المحيط ؟

الحل :

$$C = \frac{q}{V} ...(2-15)$$

$$C = \frac{(6x10^{-9} C)}{(200V)}$$

$$\boxed{C = 3x10^{-11} F = 30\, pF}$$

مثال 3 : إذا علم أن سعة متسعة ذات لوحين متوازيين هي ($100\, \mu F$) ، فما مقدار مساحة اللوحين عندما تكون المسافة بين لوحيها ($0.1mm$) ، إذا علمت أن السماحية الكهربائية للوسط يساوي ($8.85x10^{-12} C^2 / N.m^2$) ؟

الحل :

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{d} ...(6-15)$$

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_o}$$

$$A = \frac{(100x10^{-6} F)(0.1x10^{-3} m)}{(8.85x10^{-12})}$$

$$\boxed{\Rightarrow A = 1.13m^2}$$

مثال 4 : متسعة المسافة بين لوحيها المتوازيين ($5mm$) ومساحة كل منهما ($2m^2$) ، فإذا كانت الفسحة بين الصفيحتين خالية من مادة عازلة وسلّط فرق جهد بينهما مقداره ($10000V$) ، فإذا علمت أن السماحية الكهربائية للوسط يساوي ($8.85x10^{-12} C^2 / N.m^2$) ، إحسب :

1- سعة المتسعة ؟

2- الشحنة على كل لوح ؟

3- المجال الكهربائي في الفسحة بين اللوحين ؟

الحل :

1 - لإيجاد سعة المتسعة :

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{d} ...(6-15)$$

$$C = (8.85x10^{-12}) \frac{(2)}{(5x10^{-3})}$$

$$\boxed{C = 3.54x10^{-9} Farad}$$

2 - لإيجاد الشحنة على كل لوح :

$$C = \frac{q}{V} ...(2-15)$$

$$q = CV$$

$$q = (3.54x10^{-9} F)(10000V)$$

$$\boxed{q = 3.54x10^{-5} C}$$

3 - لإيجاد المجال الكهربائي في الفسحة بين اللوحين :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{q}{\varepsilon_o A} ...(4-15)$$

$$E = \frac{(3.45x10^{-5})}{(8.85x10^{-12})(2)}$$

$$\boxed{E = 20x10^5 N/C}$$

3-4 ثابت العزل (Dielectric Constant)

لقد دلت التجارب على أن إدخال لوح عازل بين لوحي المتسعة يسبب تناقص فرق الجهد بالرغم من بقاء الشحنة على سطحي المتسعة ثابتة لا تتغيّر ، وهذه النتيجة تتفق مع التفسيرات النظرية حيث أن ضعف المجال داخل العازل يؤدي بالتأكيد إلى نقص فرق الجهد بين لوحي المتسعة المشحونة وذلك إستنادا إلى العلاقة ($V = E.d$) ، فلو فرضنا أن فرق الجهد بين اللوحين عندما يفصلهما الفراغ هو (V_o) فإن فرق الجهد بعد وضع العازل بين اللوحين سيصبح (V) بحيث أن :

$$\boxed{\frac{V_o}{V} = \frac{E_o}{E} = K ...(7-15)}$$

حيث أن (K) تمثل صفة مميزة للوسط العازل وتدعى ثابت العزل (Dielectric Constant) ومقداره للفراغ يساوي واحد بينما للمواد العازلة يكون دائما أكبر من واحد (للهواء $K = 1.0006$) ومن ذلك يتبيّن أن (V) أصغر من (V_o) بمقدار (K) من المرات .

من المعادلة (2 – 15) ($C = \frac{q}{V}$) يتضح تأثير وضع العازل بين لوحي المتسعة على قيمة السعة حيث تزداد (K) من المرات طالما أن شحنة المتسعة لا تتغيّر بإدخال العازل ، وإذا فرضنا أن مقدار السعة عندما يكون اللوحان في الفراغ (C_o) فإن مقدارها سيكون بعد وضع العازل بين لوحي المتسعة :

$$\boxed{C = KC_o ...(8-15)}$$

لإيجاد سعة المتسعة ذات اللوحين المتوازيين بعد وضع العازل بين لوحيها نعوّض في هذه المعادلة عن (C_o) من المعادلة (6 – 15) ($C = \varepsilon_o \frac{A}{d}$) فنجد :

$$C = K\varepsilon_o \frac{A}{d}$$

أو :

$$\boxed{C = \varepsilon \frac{A}{d} ...(9-15)}$$

حيث أن :

$$\boxed{\varepsilon = K\varepsilon_o ...(10-15)}$$

وتمثل (ε) صفة مميزة أخرى للعازل وتدعى بسماحية العازل ، وفي حالة الفراغ حيث ($K = 1$) تكون (ε) مساوية إلى (ε_o) .

مثال 5 : مكثّف هوائي سعته ($8\mu F$) ، إحسب سعته عندما يوضع بين لوحيه مادة عازلة ثابت العازل لها (6)

الحل :

$$C = KC_o ...(8-15)$$

$$C = (6)(8\mu F)$$

$$\boxed{C = 48\mu F}$$

مثال 6 : متسعة ذات صفيحتين متوازيتين مساحة كل منهما ($0.2mm^2$) والمسافة بينهما سنتمتر واحد ، فإذا كان فرق الجهد ($3000V$) قبل إدخال مادة عازلة بينهما وانخفض إلى ($1000V$) بعد إدخالها ، إذا علمت أن السماحية الكهربائية للوسط يساوي ($8.85x10^{-12} C^2 / N.m^2$) ، إحسب :

1- سعة المتسعة قبل إدخال المادة العازلة ؟

2- الشحنة على كل صفيحة ؟

3- سعة المتسعة بعد إدخال المادة العازلة ؟

4- قيمة ثابت العزل (K) ؟

5- السماحية (ε) للمادة العازلة ؟

6- المجال الكهربائي بعد إدخال المادة العازلة ؟

الحل :

1 - لإيجاد سعة المتسعة قبل إدخال المادة العازلة :

$$C = \varepsilon_o \frac{A}{d} ...(6-15)$$

$$C = (8.85x10^{-12})\frac{(0.2)}{(1x10^{-2})}$$

$$\boxed{C = 17.7x10^{-11} F = 177\ pF}$$

2 - لإيجاد الشحنة على كل صفيحة :

$$C = \frac{q}{V} ...(2-15)$$

$$q = CV$$

$$q = (17.7x10^{-11} F)(3x10^3 V)$$

$$\boxed{q = 53.1x10^{-8} C}$$

3 - لإيجاد سعة المتسعة بعد إدخال المادة العازلة :

$$C = \frac{q}{V} ...(2-15)$$

$$C = \frac{(53.1x10^{-8})}{(1x10^{3})}$$

$$\boxed{C = 53.1x10^{-11} F = 531 pF}$$

4 - لإيجاد قيمة ثابت العزل (K) :

$$\frac{V_o}{V} = \frac{E_o}{E} = K ...(7-15)$$

$$K = \frac{V_o}{V}$$

$$K = \frac{(3000V)}{(1000V)} \boxed{\Rightarrow K = 3}$$

5 - السماحية (ε) للمادة العازلة ؟

$$\varepsilon = K\varepsilon_o ...(10-15)$$

$$\varepsilon = (3)(8.85x0^{-12})$$

$$\boxed{\varepsilon = 26.6x10^{-12} C^2 / N.m^2}$$

6 - لإيجاد المجال الكهربائي بعد إدخال المادة العازلة :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{q}{\varepsilon_o A} ...(4-15)$$

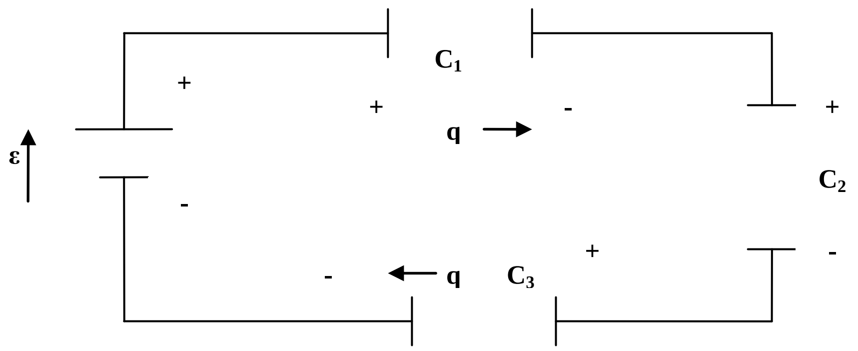
$$E = \frac{(53.1x10^{-8})}{(26.6x10^{-12})(0.2)}$$

$$\boxed{E = 10^5 V / m}$$

4-4 توصيل المتسعات (Grouping of Capacitors)

1-4-4 التوصيل على التوالي (Connection In Series)

الشكل (2 – 4) يبين الطريقة لربط ثلاث متسعات على التوالي ، حيث أن مقدار الشحنة (q) في هذا النوع من الربط يكون متساويا على جميع الصفائح ، وفرق الجهد (V) عبر المتسعات المربوطة على التوالي يساوي مجموع فروق الجهد لجميع هذه المتسعات ، أي أن :



شكل (2 – 4) : توصيل المتسعات على التوالي

$$\boxed{q_{(Total)} = q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_n \ldots (11-15)}$$

$$\boxed{V_{(Total)} = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n \ldots (12-15)}$$

ولما كانت :

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1}, V_2 = \frac{q_2}{C_2}, V_3 = \frac{q_3}{C_3} \ldots, V_n = \frac{q_n}{C_n}$$

إذن :

$$V = (\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} + \ldots + \frac{q_n}{C_n})$$

$$V = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_n})$$

$$\frac{V}{q} = (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_n})$$

وبما أنه ($\frac{V}{q}$) عبارة عن ($\frac{1}{C}$)، إذن :

$$\boxed{\frac{1}{C_{(Total)}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots = \frac{1}{C_n} \ldots (13-15)}$$

مثال 1 : متسعة سعتها 4 مايكروفاراد ربطت على التوالي بأخرى سعتها 5 مايكروفاراد :

1- ما مقدار السعة المكافئة ؟

2- إذا سلط فرق جهد مقداره 100 فولت عبر المتسعات المربوطة جد الفرق الجهد عبر المتسعة 4 مايكروفاراد ؟

الحل :

1 - مقدار السعة المكافئة :

$$\frac{1}{C_{(Total)}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \frac{1}{C_n} \dots (13-15)$$

$$\frac{1}{C_{(Total)}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \qquad \boxed{C_{(Total)} = 2.22\mu F}$$

2 - مقدار فرق الجهد عبر المتسعة 4 مايكروفاراد :

$$q = CV = 2.22x100$$

$$\boxed{q = 222\,\mu Coulombs}$$

مقدار فرق الجهد عبر المتسعة 4 مايكروفاراد :

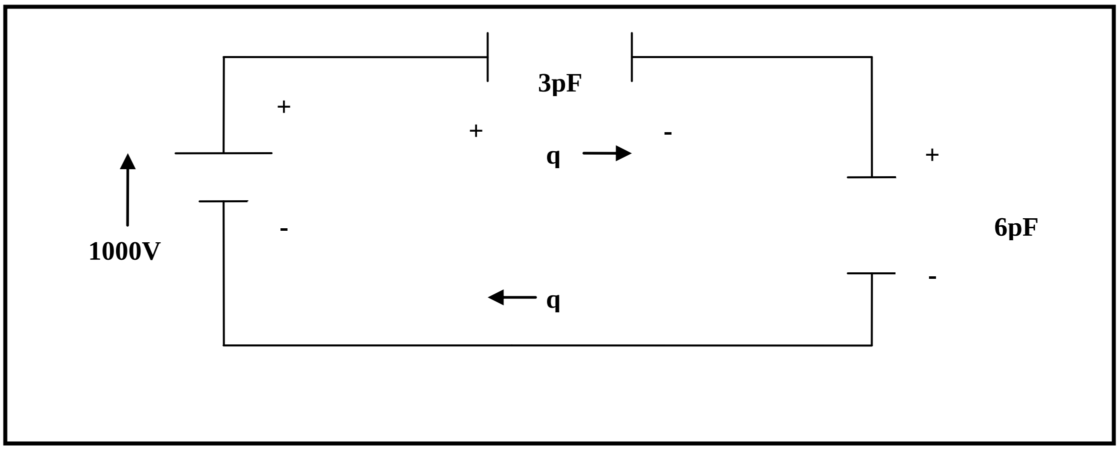
$$V = \frac{q}{C} = \frac{222}{4} \boxed{\Rightarrow V = 55.5 Volts}$$

مثال : في الشكل الآتي الذي يوضّح متسعتين مربوطتين على التوالي وموصّلين عبر مصدر فولتية مقداره ($1000V$) ، إحسب :

1- السعة المكافئة للمجموعة ؟

2- مقدار الشحنة على كل متسعة (مكثّف) ؟

3- فرق الجهد عبر كل متسعة (مكثّف) ؟



الحل :

1 - لإيجاد السعة المكافئة للمجموعة :

من المعادلة (13 - 15) :

$$\frac{1}{C_{(Total)}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... = \frac{1}{C_n} ...(13-15)$$

$$\frac{1}{C_{(Total)}} = \frac{1}{3pF} + \frac{1}{6pF}$$

$$\frac{1}{C_{(Total)}} = \frac{1}{2pF} \boxed{\Rightarrow C_{(Total)} = 2pF}$$

2 - لإيجاد مقدار الشحنة على كل مكثّف :

$$q_{(Total)} = q_1 = q_2 = q_3 = ... = q_n ...(11-15)$$

بما أن :

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = CV$$

$$q_1 = q_2 = q_{(Total)} = C_{(Total)}.V$$

$$\boxed{q_1 = q_2 = q_{(Total)} = (2x10^{-12}F)(1000V) = 2nC}$$

3 - لإيجاد فرق الجهد عبر كل مكثّف :

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1}, V_2 = \frac{q_2}{C_2}, V_3 = \frac{q_3}{C_3} ..., V_n = \frac{q_n}{C_n}$$

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{(2x10^{-9}C)}{(3x10^{-12}F)}$$

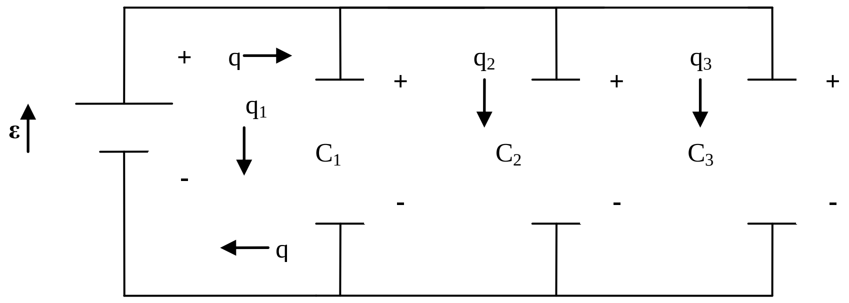
$$\boxed{V_1 = 666.6V = 0.67kV}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{(2x10^{-9}C)}{(6x10^{-12}F)}$$

$$\boxed{V_2 = 333.3V = 0.33kV}$$

2-4-4 التوصيل على التوازي (Connection In Parallel)

الشكل (4 – 3) يبين الطريقة لربط ثلاث متسعات على التوازي ، حيث أن فرق الجهد (V) في هذا النوع من الربط يكون متساويا على جميع الصفائح ، ومقدار الشحنة (q) عبر المتسعات المربوطة على التوازي يساوي مجموع الشحنات المارة في هذه المتسعات ، أي أن :



شكل (4 – 3) : توصيل المتسعات على التوازي

$$\boxed{V_{(Total)} = V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_n \ldots (14-15)}$$

$$\boxed{q_{(Total)} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n \ldots (15-15)}$$

ولما كانت :

$$q_1 = C_1V_1, q_2 = C_2V_2, q_3 = C_3V_3 \ldots, q_n = C_nV_n$$

إذن :

$$q = (C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n)V$$

$$\frac{q}{V} = (C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n)$$

وبما أنه ($\frac{q}{V}$) عبارة عن (C) ، إذن :

$$\boxed{C_{(Total)} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots = C_n \ldots (16-15)}$$

مثـال : ثـلاث متسـعات مربوطـة علـى التـوازي ، سـعة الأولـى (0.5 مايكروفـاراد) ، وسـعة الثانيـة (0.3 مايكروفاراد) ، والثالثة (0.2 مايكروفاراد) ، إحسب السعة المكافئة ؟

الحل :

مقدار السعة المكافئة هي :

$$C_{Equivalent} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C_{Equivalent} = 0.5 + 0.3 + 0.2$$

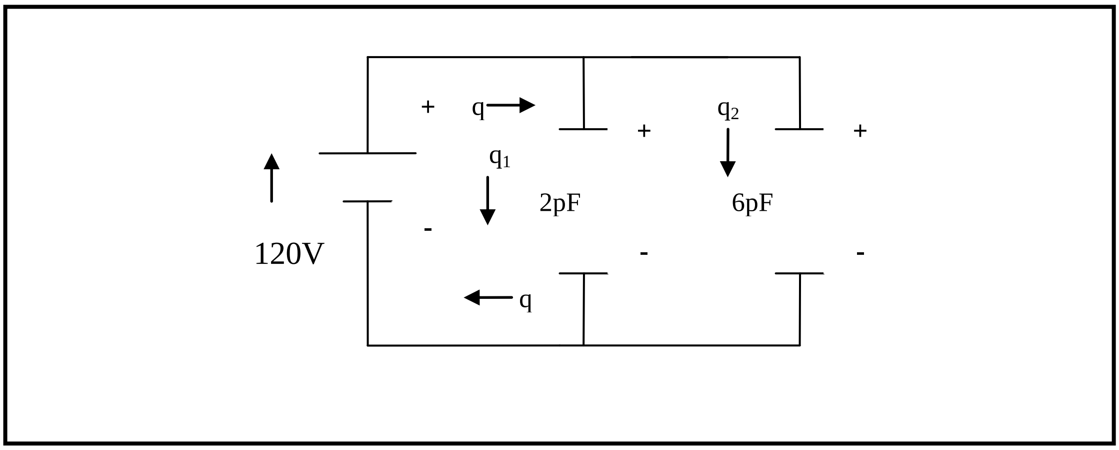
$$\boxed{C_{Equivalent} = 1\mu F}$$

مثـال : فـي الشـكل الآتـي الـذي يوضـّح متسـعتين مربـوطتين علـى التـوازي وموصـّلتين عبـر مصـدر فولتيـة مقداره ($120V$) ، إحسب :

1- السعة المكافئة للمجموعة ؟

2- مقدار الشحنة على كل متسعة (مكثّف) ؟

3- الشحنة الكلية على المجموعة ؟



الحل :

1 - لإيجاد السعة المكافئة للمجموعة :

$$C_{(Total)} = C_1 + C_2 + C_3 + ... = C_n ...(16-15)$$

$$C_{(Total)} = C_1 + C_2$$

$$C_{(Total)} = (2pF) + (6pF) \boxed{\Rightarrow C_{(Total)} = 8pF}$$

2 - لإيجاد مقدار الشحنة على كل متسعة :

$$V_{(Total)} = V_1 = V_2 = V_3 = ... = V_n ...(14-15)$$

بما أن :

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = CV$$

$$q_1 = C_1 V_1 = (2x10^{-12} F)(120V)$$

$$\boxed{\Rightarrow q_1 = 0.24nC}$$

$$q_2 = C_2 V_2 = (6x10^{-12} F)(120V)$$

$$\boxed{\Rightarrow q_2 = 0.72nC}$$

3 - لإيجاد الشحنة الكلية على المجموعة :

$$q_{(Total)} = q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n ...(15-15)$$

$$q_{(Total)} = (0.24) + (0.72)$$

$$\boxed{\therefore q_{(Total)} = 0.96nC}$$

5-4 الطاقة المخزونة في المتسعة (Stored Energy in Capacitor)

من الضروري بذل شغل لتحويل شحنة كهربائية من موصّل إلى آخر في حالة شحن المتسعة ، في البداية يكون موصّلا المتسعة بنفس الجهد وأثناء تحويل شحنة من صفيحة إلى أخرى يزداد فرق الجهد بينهما .

لنفرض بعد تحويل شحنة كهربائية مقدارها (q) من موصّل إلى آخر حصلنا على فرق جهد نهائي بين طرفي المتسعة ، في بداية الشحن كان فرق الجهد صفرا وفي نهايته أصبح (V) ، إذن معدّل فرق الجهد خلال الشحن يساوي ($\frac{V}{2}$) ولما كان الشغل المبذول يساوي حاصل ضرب معدّل فرق الجهد في كمية الشحنة الكهربائية المتحوّلة فعندئذ الطاقة المخزونة في المتسعة هي :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}qV...(17-15)}$$

وتتحرّر هذه الطاقة عند تفريغ المتسعة ، وإذا فرّغت المتسعة خلال سلك معدني فستتحوّل الطاقة إلى حرارة في السلك .

مثال : شحنت متسعة سعتها ($2\mu F$) بشحنة مقدارها ($10^{-3}C$) ، ما مقدار الطاقة المخزونة في المتسعة ؟

الحل :

$$W = \frac{1}{2}qV...(17-15)$$

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(10^{-3})^2}{(2x10^{-6})} \qquad \boxed{W = 0.25 Joule}$$

مثال : وصّل فرق جهد ($3kV$) عبر طرفي متسعة (مكثّف) سعته ($1.2\mu F$) ، إحسب الطاقة المختزنة في المتسعة ؟

الحل :

$$W = \frac{1}{2}qV...(17-15)$$

بما أن :

$$C = \frac{q}{V} \Rightarrow q = CV$$

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(1.2x10^{-6}F)(3000V)^2 \qquad \boxed{W = 5.4 Joule}$$

مسائل الفصل الرابع
السعة الكهربائية والمتسعات (المكثّفات)
(Electric Capacitance and Capacitors)

س[1] : ثلاث متسعات سعة الأولى ($2\mu F$) ، وسعة الثانية ($5\mu F$) ، والثالثة ($7\mu F$) ،

إحسب السعة المكافئة في كل من الحالتين الآتيتين :

1- في حالة الربط على التوالي ؟

2- في حالة الربط علة التوازي ؟

الإجابة: $\boxed{C_{Equivalent} = 14\mu F}$ $\boxed{C_{Equivalent} = 1.19\mu F}$

س[2] : شحنت متسعة سعتها بشحنة مقدارها ($9.6nC$) وكان فرق الجهد بين طرفيه ($120V$) ،

إحسب ما يأتي :

1- سعة المتسعة ؟

2- الطاقة المخزونة في المتسعة ؟

الإجابة : $\boxed{C = 80\mu F}$ $\boxed{W = 0.58\mu J}$

س[3] : أوجد الشحنة على كل من لوحي متسعة سعته ($0.050\mu F$) عندما يكون فرق الجهد بين اللوحين ($200V$) ؟

الإجابة : $\boxed{q = 10\mu C}$

س[4] : متسعة ذات لوحين متوازيين ، المسافة بين لوحيها ($5mm$) ومساحة كل منها ($1m^2$) فإذا وضع اللوحان في الفراغ وشحنا حتى أصبح فرق الجهد بينهما ($2x10^4 V$) ، فإذا علمت أن السماحية الكهربائية للوسط يساوي ($8.85x10^{-12} C^2 / N.m^2$) إحسب ما يأتي :

1- سعة المتسعة ؟

2- شحنة كل من اللوحين ؟

الإجابة : $\boxed{C = 1770\ pF}$ $\boxed{q = 3.54x10^{-5} C}$

س[5] : متسعتان متصلتان على التوالي مقدارهما ($2\mu F$) و ($4\mu F$) ربطت نهايتاهما بفرق جهد مقداره ($150V$) ، إحسب شحنة وفرق الجهد كل من المتسعتيين ؟ فما هو التردد الذي

الإجابة : $\boxed{V_1 = 50V}$ $\boxed{V_2 = 100V}$ $\boxed{q_1 = 200\mu C}$ $\boxed{q_2 = 133.3\mu C}$
