الرياضيات

م.م. ذكرى الكناني

الفيزياء - المرحلة الثانية

2022-2023

الرياضيات

مادة الفصل الأول

الفيزياء – الثانية

The infinite seq المتتابعات اللانهائية

$$a_n = f(n) : Z^+ \text{ or } N/\{0\} \rightarrow R$$

We denoted by $\langle a_n \rangle$ or $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Ex :

Let $f = \{1,2,3,4\}$ find seq

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$

Ex :

Let $f = \{1,2,3,4,\dots\}$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, … , $a_n = n$

$Q_4 = f(n) = n$

$\Rightarrow a_n = n$ الحد النوني

Ex :

$f = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ find a_n

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{3} \quad , \quad a_4 = \frac{1}{4}, \dots, a_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Ex :

$$f=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\dots\right\} \ find\ a_n$$

$$a_1=\frac{1}{2} \quad , \quad a_2=\frac{2}{3} \quad , \quad a_3=\frac{3}{4} \quad , \quad a_4=\frac{4}{5},\dots, \quad a_n=\frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Ex :

$$f=\{-1,1,-1,1,-1,\dots\}\ find\ a_n$$

$$a_1=-1 \ , \quad a_2=1\ , \quad a_3=-1 \quad , \quad a_n=1\ ,\dots$$

$$a_n=(-1)^n \quad \Rightarrow \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$$

Ex : H.W

$$f=\{1,-1,1,-1,1,-1,\dots\}\ \ find\ a_n$$

Ex :

$$Test\ the\ \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$y=a_n=f(n)=\frac{1}{n}$$

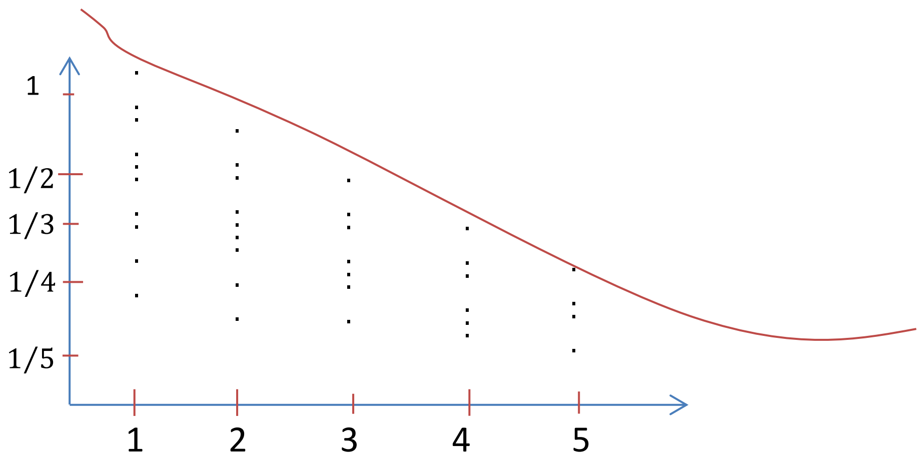
$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{1\ ,\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{3}\ ,\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{5}\ ,\frac{1}{6}\ ,\dots\right\}$$

$$a_1=f(1)=1 \ \Rightarrow (1,1)$$

$$a_2=f(2)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(2\ ,\frac{1}{2}\right)$$

$$a_3 = f(3) = \frac{1}{3} \Longrightarrow \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

$$a_4 = f(4) = \frac{1}{4} \Longrightarrow \left(4, \frac{1}{4}\right)$$



$$\Longrightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \textit{converg to Zero}$$

Ex :

$Test\ \{n\}_{n=1}^{\infty}$

$y = a_n = f(n) = n$

$a_1 = f(1) = 1 \Longrightarrow (1,1)$

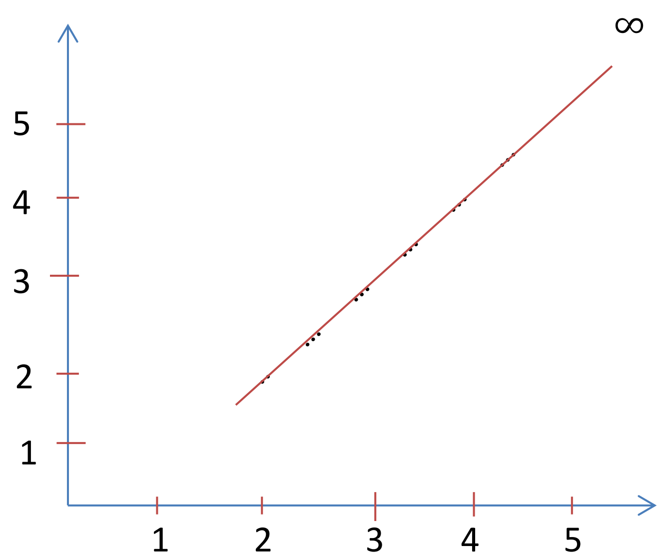
$a_2 = f(2) = 2 \Longrightarrow (2,2)$

$a_3 = f(3) = 3 \Longrightarrow (3,3)$

$a_4 = f(4) = 4 \Longrightarrow (4,4)$

$\vdots$

$\Longrightarrow \ \{n\}_{n=1}^{\infty}\ div.$



Remark :

Let $\langle a_n \rangle$ *infinite seq. then* $\langle a_n \rangle$ *is converge seq. to L iff*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Remark :

1. *If L is conv. Pt of* $\langle a_n \rangle$ *then L is unigne conv. Pt*
2. *If* $\langle a_n \rangle$ *conv. seq. to* L_1 *and* L_2 *then*
$$L_1 = L_2$$
3. *If* $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ *and* $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ *wher*
$$L_1 \neq L_2 \text{ then } \langle a_n \rangle \text{ is div}$$

Ex :

Test $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{conv.} Zero$$

Ex :

Test $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1) = 1$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{conv.} 1$$

Ex:

$$Test\ \left\{(-1)^n\ \frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\langle a_n \rangle = (-1)^n\ \left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$If\ n\ odd$$

$$a_n = \langle\frac{1}{n}-1\rangle$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right) = -1 = L_1$$

$$If\ n\ even$$

$$a_n = \langle 1-\frac{1}{n}\rangle$$

$$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} = 1 = L_2 \Longrightarrow L_1 \neq L_2$$

$$then\ \left\{(-1)^n\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\ \ is\ not\ conv.$$

$$then\ \left\{(-1)^n\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\ \ is\ div.$$

شرط التقارب في المتتابعة اي اذا كانت الغاية موجودة المتتابعات المتقاربة

Convergene Seqs .

$Let\ a\ seq.\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ , then \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ is\ conv.\ to\ L\ if$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L\ , L \in R$

تعريف : الدقيق التقارب المتتابعات

$$\forall n > k\ , \qquad \exists \epsilon > 0\ s.t\ |a_n - a_0| < \epsilon$$

$$\equiv a_n \in (a_0 - \epsilon\ , a_0 + \epsilon)$$

$it\ mean\ a_n \xrightarrow{conv.} a_0$

Ex :

$Show\ that\ \langle a_n \rangle = \langle 3 \rangle\ is\ conv.\ to\ 3$

$\langle 3 \rangle = \langle 3,3,3, \dots \rangle$ حسب التعريف

$|a_n - a_0| < \epsilon\ , \qquad \forall n > k$

$|a_n - 3| < \epsilon$ حسب تعريف المطلق

$-\epsilon < a_n - 3 < \epsilon$

$3 - \epsilon < a_n < 3 + \epsilon$

$\Rightarrow a_n \in (3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$

$\Rightarrow a_n = 3 \in (3 - \epsilon, 3 + \epsilon)$

$3 - \epsilon \qquad 3 + \epsilon$

$\Rightarrow\ \langle a_n \rangle = \langle 3 \rangle \xrightarrow{conv.} 3$

Theorem : (Sandwich theo.) نظرية الساندويج

$Let\ \langle c_n \rangle, \langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle\ are\ seqs.$

$S.t$

$c_n < a_n < b_n\ if$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

$$(i.e)\ c_n \xrightarrow{conv.} L\ ,\quad b_n \xrightarrow{conv.} L\ then$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L\ \ that\ mean\ \ a_n \xrightarrow{conv.} L$$

Ex :

$$Test\ \left\{\frac{\cos n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$-1 < \cos n < 1 \qquad \div n$$

$$-\frac{1}{n} < \frac{\cos n}{n} < \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

$$\frac{\cos n}{n} \xrightarrow{conv.} 0$$

Remark :

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0 \quad , \quad x \in R$

(2) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \ , \ |x| < 1 - 1 < x < 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \ , \quad x > 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

EX : H.W

Test the seqs .

(1) $\left\{\frac{3 + \ln n^4}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(2) $\left\{\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(3) $\left\{\left(\frac{n+5}{n}\right)^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(4) $\left\{\frac{e^n + n^2}{e^n - 2n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(5) $\left\{\frac{8^{n+1}}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Remark :

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3), \dots$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Infinite Series المتسلسلات اللانهائية

The Infinite Series is denoted by

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Such that

What a_n الحد النوني

Now الان

Let

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

$\Longrightarrow \{S_n\} = \langle S_1\, , S_2, S_3, \dots , S_n \rangle$ *is called the Seq. of the Partial Sums.*

متتابعة المجاميع الجزئية للمتسلسلة

of the series $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$

The convergere and divavative of the infinite series

Theorem :

$$Let \sum_{i=1}^{\infty} a_n \text{ is series then}$$

$$if \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ , then} \sum_{i=1}^{\infty} a_n \text{ is div}$$

Ex :

$$Show\ that \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5} \text{ is div}$$

$$a_n = \frac{n}{2n+5}$$ الحد النوني

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \quad , \qquad \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5} \text{ is div}$$

Theorem :

$$Let \sum_{i=1}^{\infty} a_n \text{ is series and } \{S_n\} \text{ is seq. of partial sums of the series .}$$

Then

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n \text{ is conv. if } \lim_{n\to\infty} S_n = L \text{ , } L \in R$$

$$and \sum_{i=1}^{\infty} a_n \text{ is div. if } \lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ or is not exist}$$

Ex :

$$Test\ \left\{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Sol :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n+1}=1$$

أو

اشتقاق

$$=\lim\frac{2n}{2n+2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\therefore\ \left\{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}\quad conv.to\ 1$$

Ex :

$$Test\ \left\{\frac{x}{\sqrt[n]{2n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}\quad ,x\in R$$

Sol :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(2n+1)^{1/2}}=\frac{x}{\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{1/n}}$$

$$Let\ A=\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{1/n}$$

$$\log A=\log\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log(2n+1)^{1/n}$$

خواص log

$$=\ \lim_{n\to\infty}\log\frac{2n+1}{n}$$

قاعدة لوبيتال

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(2n+1)}=\frac{2}{\infty}=0$$

$$\Longrightarrow \log A=0\Longrightarrow A=e^{\circ}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^{1/n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(2n+1)^{1/n}}=\frac{x}{1}=x$$

$$\left\{\frac{x}{\sqrt[n]{2n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}\quad conv.to\ x$$

Ex :

$$Test\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

Sol :

$$a_n=\frac{n}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\ is\ div.$$

Ex :

$$Test\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

Sol :

$$a_n=(-1)^{n+1}=\begin{cases}1 & ,\ n\ odd\\ -1 & ,\ n even\end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ *is not exist* → لان لها قيمتين

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ is\ div.$$

Ex : H.W

$$Test\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$$

نظرية :- اذا كانت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L_1 \quad \text{وان} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L_2$$

$(1) \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mp b_n) = L_1 \mp L_2$

$(2) \sum_{n=1}^{\infty} k\, an = k\, L_1 \;\; , k \in R$

ملاحظة :

اذا كانت لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإن

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mp b_n)$ متباعدة

Geometric series المتسلسلة الهندسية

هي تأخذ الشكل التالي

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = ar^0 + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

حيث a ثابت

r الاساس الذي يولد النتسلسلة

تكون المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ متقاربة الى $\frac{a}{1-r}$ اذا كانت $|r| < 1 = 0 < r < 1$
تكون $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ متباعدة اذا كانت $|r| \geq 1$.

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$r = \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\ conv.to\ \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1.1^{n-1}$$

$a = 1\,, r = 1$

$\therefore |r| = |1| = 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \ div.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ conv. to \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)(-2)^{n-1}$$

$|r| = |-2| = 2 > 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \ is\ div.$$

مثال (واجب)

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

المتسلسلات من النوع P (P-series)

يرمز لهذه المتسلسلات

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

(1) $P > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *conv.*

(2) $p \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *div.*

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

الحل

(1) $\sum \frac{1}{n} \qquad P - series\,, P = 1$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ *div.*

(2) $\sum \frac{1}{n^2} \qquad P - series\,, P = 2 > 1$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ *conv.*

(3) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad H.W$

المتسلسلات المتناوبة Alterative Series

لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ تسمى بالمتسلسلة المتناوبة لأنها تعطي حدود موجبة وسالبة كالأتي :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots$$

نظرية : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ متسلسلة متناوبة فأذا كانت

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

متقاربة فإن هذا التقارب يسمى بالتقارب المطلق وان $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ تكون متقاربة بالمطلق .

ملاحظة : لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ متسلسلة متناوبة فأذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متباعدة فهذا لا يعني $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ متباعدة .

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

الحل

$$(1) \sum \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad P - series$$

$$P = 2 > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \ conv.$$

اذن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ تمتلك تقارب مطلق .

اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات

1-اختبار التكامل Test Integral

ليكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ فأذا كانت $f(x) = a_n$ دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق الرياضي فأذا كانت $\int_0^{\infty} f(x)dx$ له قيمة حقيقة فأن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة واذا كانت $\int_0^{\infty} f(x)dx$ قيمته ∞ او غير موجودة فأن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ بأستخدام اختبار التكامل

الحل

$$f(x) = a_n = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1}x|_1^{\infty}$$

$$= \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \; conv.$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ بأستخدام اختبار التكامل

الحل

$$f(x) = a_n = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_1^{\infty} = \infty - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \infty$$

$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \infty$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad div.$$

مثال واجب

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n-2}$ بأستخدام اختبار التكامل .

2-اختبار المقارنة

لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة غير منتهية فأن

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بحيث $a_n \leq c_n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ متباعدة بحيث $a_n \geq d_n$.

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ بأستخدام اختبار المقارنة

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

$$Since\ n^2 + n > n^2$$

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

بما ان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة

$$P - series$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}\ \ conv.$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$ بأستخدام اختبار المقارنة

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$$

$$Since\ 2^n+3>2^n$$

$$\frac{1}{2^n+3}\le\frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$Since\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\ is\ conv.$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}\ is\ conv.$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ بأستخدام اختبار المقارنة

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$Since \ln n > n$

$$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$Since \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ is \ div.$$

$$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \ is \ div.$$

مثال واجب

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n^3-1}$ بأستخدام اختبار المقارنة

ملاحظة :

اذا كانت لدينا متسلسلة متناوبة ويراد اختيارها بأستخدام الاختبارات (اختبار التكامل ، المقارنة ، النسبة ، الجذر) فأننا نأخذ القيمة المطلقة للمتسلسلة المتناوبة و المتسلسلة الناتجة تخضع لهذه الاختبارات فأن كانت متقاربة فهذا يعني ان المتسلسلة المتناوبة متقاربة بالمطلق و ان كل تقارب مطلق يؤدي الى تقارب عام اذن تكون المتسلسلة المتناوبة متقاربة .

3-اختبار المتسلسلات المتناوبة

لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ متسلسلة متناوبة

فأن $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ تكون متقاربة اذا تحققت الشروط التالية :

a) $a_n > 0 \ ,\forall n \ \ (a_n \ Positive \ \forall n)$
b) $a_n \geq a_{n+1} \ ,\forall n$
c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

الحل

طريقة (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \ is \ P-series$$

$$P = 1 \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \ div.$$

لكن هذا لايعني $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متباعدة .

طريقة (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n-\frac{1}{n}/a_n$$

1) $a_n=\frac{1}{n}>0\ ,\forall n$

2) $n<n+1\ \Rightarrow\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}$

$a_n\geq a_{n+1}$

3) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim\frac{1}{n}=0$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ is\ conv.$$

4 - اختبار النسبة

اذا كان لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حدودها موجب و انه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |T| = T$$

فأذا كان

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad conv. \;\; if \; |T| < 1$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad div. \quad if \; |T| > 1$
c) $The\ test\ is\ fain\ T = 1$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

الحل

$$a_n = \frac{2^n}{3^n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^n}{2^n} \times \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \;\; is\ conv.$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

الحل

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \times \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty > 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \ is\ div.$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+1}$

الحل

$$a_n = \frac{3}{n^2+1} \quad ; \quad a_{n+1} = \frac{3}{(n+1)^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3/n^2+2n+2}{3/n^2+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3} \cdot \frac{3}{n^2+2n+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2+2n+2} = 1$$ الاختبار فاشل

امثلة واجب

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln(n)}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

5-اختبار الجذر النوني

لتكن لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ذات حدود موجبة فأذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad if \ :$$

$$(1) \quad L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad conv$$

$$(2) \quad L > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad div$$

$L = 1 \qquad \Rightarrow$ الاختبار فاشل

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2))^n}$

الحل

$$a_n = \frac{1}{(\ln 2)^n} \qquad , \qquad \sqrt[n]{2^n} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(2))^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(2))^n} \quad conv \ \ to \ \ \frac{1}{\ln 2}$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

الحل

$$a_n = \frac{1}{5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)^{1/n} = \frac{1}{5} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \quad conv \ \ to \ \ \frac{1}{5}$$

OR

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum \underset{a}{\frac{1}{5}} . \left(\underset{r}{\frac{1}{5}}\right)^{n=1}$$

$$r = \frac{1}{5} < 1$$

$$a = \frac{1}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \quad conv \quad to \, \frac{1/5}{1 - 1/5}$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

الحل

$$a_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}<1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \quad conv\ \ to\ \ \frac{1}{3}$$

مثال

اختبر $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-n}{n+1}\right)^n$

الحل

$$a_n=\left(\frac{n^2-n}{n+1}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-n}{n+1}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2-n}{n+1}\right)^n\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n+1}=\infty>1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-n}{n+1}\right)^n \quad div$$

امثلة واجب

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 3}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2^n n!}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{2^n}$

متسلسلات القوى Power series

المتسلسلات حول $x = 0$ تعرف كالأتي

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \quad x \in R$$

المتسلسلات حول $x = a$ تعرف كالأتي

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

فلاحظ ان المتسلسلة هي متسلسلة هندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

الاساس الثابت

$r = x$

$a = c_n$

فمثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$r = a$

$a = 1$

$$if\ |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad conv.\ to\ \frac{1}{1-x}$$

مثال

اختبر $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$

الحل

اختبار الجذر

$$a_n=(\ln x)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\ln x)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln x=\ln x$$

$$if\ \ \ln x<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n \qquad conv.$$

$$if\ \ \ln x>1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n \qquad div.$$

$$if\ \ \ln x=1 \Rightarrow x=10$$

مثال

اختبر $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad , \quad x\neq 0 \quad , x\in R$

الحل

اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| \quad , \quad a_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$a_{n+1}=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/n+1}{x^n/n}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = |x| \lim \frac{n}{n+1} = |x|$$

$$if\ |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad conv.$$

$$if\ x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$ فنستخدم اختبار المتسلسلة المتناوبة

$$1)\ \ a_n = \frac{1}{n} > 0$$

$$a_n > 0$$

$$2)\ \ a_n = \frac{1}{n} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$n < n+1$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$a_n \geq a_{n+1}$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad conv.$$

$$if\ x = -1 \ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)}{n}$$

فنستخدم الشروط اعلاه

ملاحظة :

في المثال السابق يمكن صياغته كالأتي

ناقش قيم x التي تجعل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ متقاربة او متباعدة

امثلة واجب

ناقش قيم x التي تجعل المتسلسلات التالية متقاربة اولاً مستخدماً اختبار النسبة

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

$x \in R \quad , \quad x \neq 0$

متسلسلات تايلر و ماكلورين Taylor and Maclarin Series

لتكن لدينا متسلسلة قوى حول $x = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

$$Let\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \cdots$$

$$f^{(3)}(x) = 6c_3 + \cdots$$

$$If\ x = a$$

$$f'(a) = c_1 \Rightarrow f''(x) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

$$f^{(3)}(a) = 6c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{6}$$

$$f^{(4)}(a) = n!\, c_n \Rightarrow c_n = \frac{f^{(4)}(a)}{n!}$$

$$Let\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

متسلسلة تايلر

$$\left[f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right]$$

متسلسلة ماكلورين

$$\left[IF\ a=0 \implies f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]$$

امثلة واجب

ناقش قيم x للمتسلسلة التالية

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ ;\quad x\in R\ ,x\neq 0$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$$

مثال

جد متسلسلة ماكلورين الى الدوال التالية

1) $f(x)=e^x$ 2) $f(x)=e^{x^2}$ 3) $e^{\sqrt{x}}$

الحل

1) $f(x)=e^x$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots$$

$$f(0) = e^0 = 1 \quad ; \quad f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Longrightarrow f''(0) = 1 \ ; \quad f^{(3)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

2) $f(x) = e^{x^2}$

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(x) = 2xe^{x^2} \Longrightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} \Longrightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 8x^3e^{x^2} + 8xe^{x^2} + 4xe^{x^2} \Longrightarrow f'''(0) = 0$$

$$e^{x^2} = 1 + \frac{2x^3}{2!} + \cdots$$

3) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ $\quad H.W$

مثال

جد متسلسلة ماكلورين للدالة

$$f(x) = \sin x$$

الحل

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \Longrightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \Longrightarrow f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$f^{(6)}(x) = -\sin x \Longrightarrow f^{(6)}(0) = -\sin(0) = 0$$

$$\sin(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

مثال واجب

جد متسلسلة ماكلورين للدالة

$$f(x) = \cos x$$

متعددات الحدود ماكلورين و تايلر Taylor and Maclarin Polynomial

متعددة حدود تايلر من الدرجة k حول $x = a$ تعرف كالأتي :

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n \;,\; x = a$$ حول

متعددة حدود ماكلورين من الدرجة n حول $x = 0$ تعرف كالأتي :

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(0)}{n!} x^n$$

The Partial Derivative الاشتقاق الجزئي

$y = f(x)$

$z = f(x, y)$

الدالة بمتغيرين اذا كانت

$z = f(x, y)$

فيقال ان الدالة f هي دالة بمتغيرين x, y

مثال

$f(x, y) = x^2y^3 - xy \Leftarrow$ دالة بمتغيرين x, y

مثال

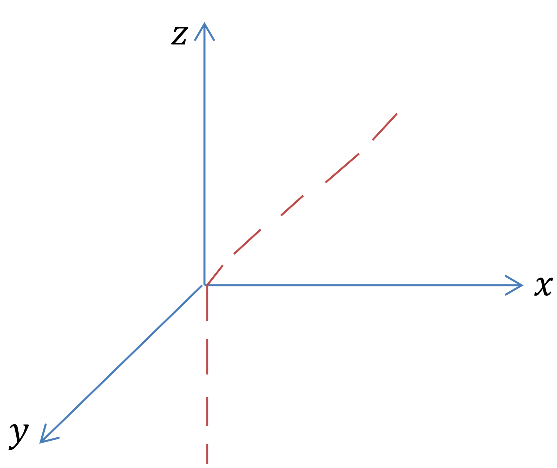
$f(x, y) = x^2y^3 - x^2y \Leftarrow$ دالة بمتغيرين x, y

(x, y)متغيرات مستقلة

$z = f(x, y)$ متغير معتمد

$f(x, y)$ تقع في $|R^3$

اي تقع في $|R^3$ هي (x, y, z)



الدالة ثلاث متغيرات اذا كانت $w = f(x, y, z)$

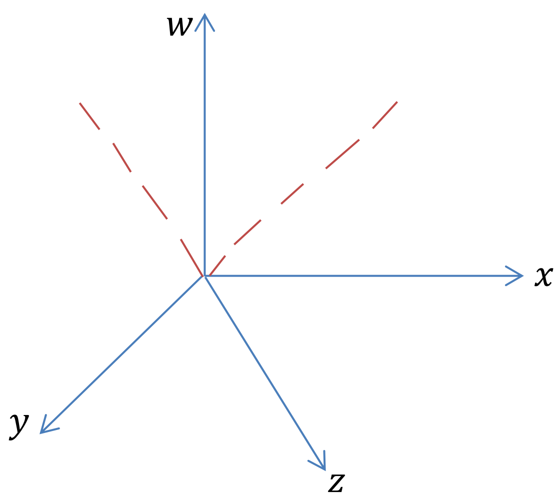
فيقال ان الدالة هي x, y, z

w متغير معتمد

(x, y, z)متغيرات مستقلة

اي نقطة تقع في $|R^4$

هي (x, y, z, w)



الدالة بـ n من المتغيرات

اذا كانت $R = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

فيقال ان الدالة f هي دالة بـ n من المتغيرات

R متغير المعتمد

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ متغيرات مستقلة

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ تقع في $|R^{n+1}$

n من الاحداثيات $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, R)$

الاشتقاق الجزئي

1) اذا كانت لدينا $z = f(x,y)$ فإن

$$\frac{df}{dx} = f_x \quad ; \quad \frac{df}{dy} = f_y$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = f_{xx} \quad , \quad \frac{d^2f}{dy^2} = f_{yy}$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = f_{xy} \quad , \quad \frac{d^2f}{dydx} = f_{yx}$$

2) اذا كانت لدينا $w = f(x,y,z)$ فإن

$$\frac{df}{dy} = f_y \quad ; \quad \frac{df}{dz} = f_z$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = f_{xx} \quad , \quad \frac{d^2f}{dxdz} = f_{xz}$$

وهكذا بقية المشتقات

مثال

اذا كانت

$$f(x,y,z) = x^3y^2z - z^2x^2$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2y^2z - 2z^2x \ = f_x$$

$$f_{xx} = 6xy^2z - 2z^2$$

$$\frac{df}{dy} = 2yx^3z \quad = f_y$$

$$f_{yy} = 2x^3z$$

$$\frac{df}{dz} = x^3y^2 - 2zx^2 = f_z$$

$$f_{zz} = -2x^2$$

$$\frac{d^2f}{dxdy} = f_{xy} = 6yx^2z$$

$$\frac{d^2f}{dydx} = 6x^2yz$$

$$\frac{d^2f}{dzdx} = 3x^2y^2 - 4xz$$

$$\frac{d^2f}{dxdz} = H.W$$

$$f_{yz} = H.W$$

ملاحظة

اذا كانت لدينا $f(x, y)$ قابلة للاشتقاق فإن معادلة لابلاس هي

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

مثال

برهن ان

$$f(x, y) = e^{-2y}\cos(2x)$$

تحقق معادلة لابلاس

$$f_x = -2e^{-2y}\sin(2x)$$

$$f_{xx} = -4e^{-2y}\cos(2x)$$

$$f_y = -2e^{-2y}\cos(2x)$$

$$f_{yy} = 4e^{-2y}\cos(2x)$$

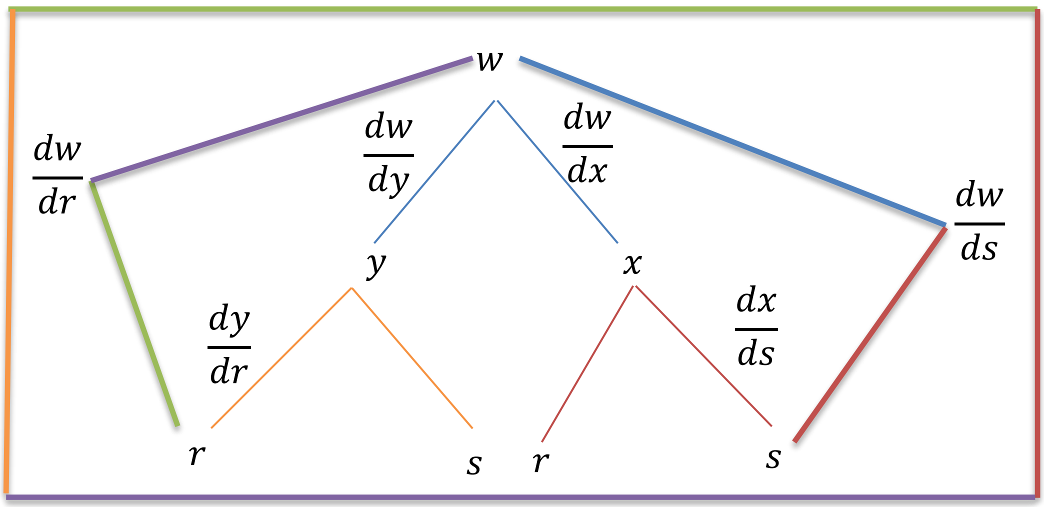
$$f_{xx} + f_{yy} = -4e^{-2y}\cos(2x) + 4e^{-2y}\cos(2x)$$

$$= 0$$

اذن $f(x, y)$ تحقق معادلة لابلاس

قاعدة السلسلة

اذا كانت $w = f(x,y)$ وان $x = g(r,s)$, $y = u(r,s)$



$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} + \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$$

مثال

لتكن $w = x^2 + y^2$ بحيث ان $y = r + s$, $x = r - s$ جد $\frac{dw}{ds}$, $\frac{dw}{dr}$

الحل

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} + \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dr}$$

$$= 2x\,.(1) + 2y\,.1$$

$$= 2x + 2y$$

$$= 2(y - s) + 2(y + s)$$

$$= 2r - \cancel{2}s + 2r + \cancel{2}s = 4r$$

مثال

اذا كانت $a,b \in R$, $M = ax + by$ وأن $w = M^3 + \tan M + \cos M$ برهن ان $a\frac{dw}{dy} = b\frac{dw}{dx}$.

الاثبات

$$L.s = a\frac{dw}{dy} = a\left[\frac{dw}{dM} \cdot \frac{dM}{dy}\right]$$

$$= a[3M^2 + \sec^2 M - \sin M].[b]$$

$$= ab[3M^2 + \sec^2 M - \sin M]$$

$$R.s = b\frac{dw}{dx} = b\left[\frac{dw}{dM} \cdot \frac{dM}{dx}\right]$$

$$= b[3M^2 + \sec^2 M - \sin M].[a]$$

$$= ab[3M^2 + \sec^2 M - \sin M]$$

$$\Longrightarrow L.s = R.s$$

$$\Longrightarrow a\frac{dw}{dy} = b\frac{dw}{dx}$$

مثال : الواجب

برهن ان $\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2w}{dx^2}$ اذا كانت $w = \cos(x+y) + \sin(x-y)$.

The Vectors المتجهات

لتكن لدينا $A=(x_1,y_1,z_1)$, $B=(x_2,y_2,z_2)$ يعرف المتجه $\overrightarrow{AB}$ كالأتي

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\,i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$$

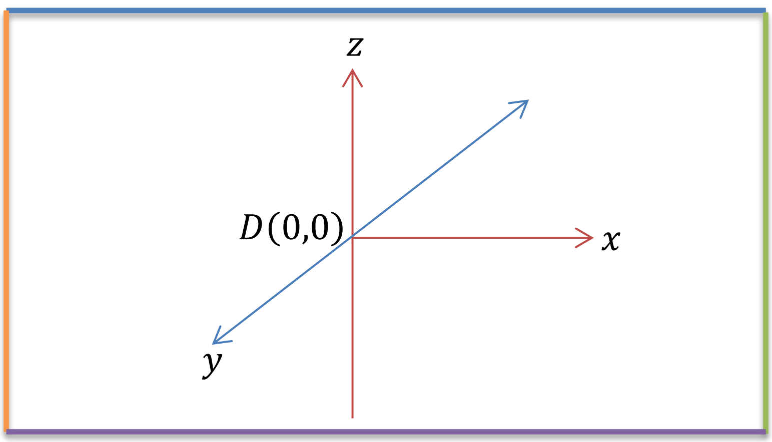
فأذا كانت $O=(0,0,0)$ نقطة الأصل

$T(x,y,z)$ نقطة في الفضاء R^3 فإن

$$\overrightarrow{OT}=(xi+yj+zk)$$

نقطة بداية

نقطة نهاية



The Proper Ties of The Vectors الخواص على المتجهات

1) $i.i = j.j = k.k = 1$

$i.j = i.k = k.j = 0$

Let $\vec{A} = x_{1i} + y_{1j} + z_{1k}$, $\vec{B} = x_{2i} + y_{2j} + z_{2k}$

2) $|A| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2}$ طول المتجه

3) $aA = a(x_{1i} + y_{1j} + z_{1k}) = ax_{1i} + ay_{1j} + az_{1k}$, $a \in R$, $a \neq 0$

4) $\vec{A} \mp \vec{B} = (x_{1i} + y_{1j} + z_{1k}) \mp (x_{2i} + y_{2j} + z_{2k})$

$= (x_1 \mp x_2)i + (y_1 \mp y_2)j + (z_1 \mp z_2)k$

5) *Dot Proded* الضرب النقطي

$\vec{A}.\vec{B} = (x_{1i} + y_{1j} + z_{1k}).(x_{2i} + y_{2j} + z_{2k})$

$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$A.B \in R$

6) $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

ملاحظة

تعرف المصفوفات المربعة التي حجمها 3×3 , 2×2

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

رقم الصف

رقم العمود

عناصر القطر الرئيسي a_{11}, a_{22}

عناصر القطر الثانوي a_{21}, a_{12}

محدد المصفوفة $|L|$

ويعرف

$$|L| = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

وان المصفوفة H التي حجمها 3×3 تعرف كالأتي

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

المحدد

$$|H| = (-1)^{1+1}\, a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$
$$+(-1)^{1+2}\, a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$
$$+(-1)^{1+3}\, a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

7) $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^2 i(y_1z_2 - z_1y_2) + (-1)^3(x_1z_2 - z_1x_2) + (-1)^4 k(x_1y_2 - y_1x_2)$$

8) $\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B|\cos\theta \;\; ,\theta\ is\ between\ \vec{A}\ and\ \vec{B}$

9) $|A \times B| = |A|.|B|\sin\theta\, ,\theta\ is\ between\ \vec{A}\ and\ \vec{B}$

10) $Let\ \vec{A}.\vec{B}\, ,|A \times B|$ اضلاع متوازي اضلاع فإن مساحة متوازي الاضلاع

11) $\vec{A}.\vec{B} = 0\ \ if\ \ A \perp B$

$Proof$:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B|\cos\theta\ \ ,\theta = \frac{\pi}{2}\, ,\ \ A \perp B$$

$$= |A|.|B|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

الرياضيات

مادة الفصل الثاني

الفيزياء –الثانية

متجه الدوال

لتكن f, g, k دوال بـ x, y, z فإن متجه الدوال A يعرف كالأتي :

$$A = f(x,y,z)i + g(x,y,z)j + h(x,y,z)k$$

الانحدار Gradient

اذا كان لدينا المتجه (المؤثر) الانحدار

$$\Delta\left(\frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k\right)$$

وكانت لدينا الدالة $\emptyset(x, y, z)$ فإن اعداد الدالة يعرف كالأتي :

$$grad(\emptyset) = \Delta(\emptyset) = \left(\frac{d\emptyset}{dx}i + \frac{d\emptyset}{dy}j + \frac{d\emptyset}{dz}k\right)$$

تباعد متجه الدالة Dvexgenee

اذا كانت لدينا متجه الدالة

$$A = fi + gj + hk$$
$$= f(x,y,z)i + g(x,y,z)j + h(x,y,z)k$$

ان قيمة الدالة A يعرف كالأتي :

$$div\ A = \Delta\ A\left(\frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k\right).(fi + gj + hk) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dk}$$

مثال

طبق الخواص على المتجهات التالية

$$\vec{A} = 3i + k \text{ وان } B = i + 2j - 2k$$

الحل

(a) $2A - B = 2(3i + k) - (i + 2j - 2k)$

$$= (6i + 2k) + (-i - 2j + 2k)$$

$$= (6 - 1)i + (0 - 2)j + (2 + 2)k$$

$$= 5i - 2j + 4k$$

(b) $\vec{A}.\vec{B} = (3i + k).(i + 2j - 2k)$

$$= 3 + 0 + (-2) = 3 - 2 = 1 \in R$$

(c) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^2 i(0 - 2) + (-1)^3 j(-6 - 1) + (-1)^4 k)\ (6 - 0)$$

$$= -2i + 7j + 6k$$

(d) θ الزاوية المحصورة بين $\vec{A}, \vec{B}$

$$\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B| \cos\theta$$

$$1 = \sqrt{9 + 1}.\sqrt{1 + 4 + 4} \cos\theta$$

$$1 = \sqrt{10}.\sqrt{9} \cos\theta$$

$$1 = 3\sqrt{10} \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3\sqrt{10}} \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{10}}\right) = 84°$$

$(e)\ \vec{B}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = (i+2j-2k).(-2i+7j+6k)$

$$= -2+14+(-12) = 0$$

$\Longrightarrow\ \vec{B}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = 0$

$\nRightarrow \vec{B}\perp\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ بينهما

جد مساحة متوازي المستطيلات الذي ضلعاة (f)

مساحة متوازي المستطيلات $= \left|\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right|$

$$\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 i(12+14) + (-1)^3 j(6-4) + (-1)^4 k)(7+4)$$

$$= 26i - 2j + 11k$$

$\left|\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right| = |26i-2j+11k|$

$$= \sqrt{(26)^2+(-2)^2+(11)^2} = \sqrt{676+4+121} = \sqrt{801}$$

مثال : الواجب

اذا كانت

$$\vec{A} = (2i+3j-k)$$

$$\vec{B} = (3i-j+2k)$$

فجد

$(1)\ \vec{A}\times\vec{B}$ $\quad (2)\ \vec{A}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ $\quad (3)\ \vec{A}.\vec{B}$ $\quad (4)\ 3\vec{A}+\vec{B}$

(5) مساحة متوازي المستطيلات الذي ضلعاة

$\vec{A}\times\vec{B}$ و $\vec{A}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

مثال

اذا كانت قيمة الدالة

$$A = fi + gj + hk$$

$$f(x,y,z) = xz \quad , \quad g(x,y,z) = e^{yz} \quad , \quad h(x,y,z) = -\ln xy$$

ولتكن

$$\emptyset(x,y,z) = xy^2z^3$$

فجد

$$(1) \quad grad\ \emptyset = \Delta\ \emptyset \left(\frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k\right).(xy^2z^3)$$

الحل

$$grad\ \emptyset = \frac{d(xy^2z^3)}{dx}i + \frac{d(xy^2z^3)}{dy}j + \frac{d(xy^2z^3)}{dz}k$$

$$= y^2z^3i + 2xyz^3j + 3xy^2z^2k$$

انحدار الدالة

$$(2) \quad div\ A = \Delta\ A\left(\frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k\right).(fi + gj + hk)$$

$$= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dk} = \frac{d(xz)}{dx} + \frac{d(e^{yz})}{dy} + \frac{d(\tan(xy))}{dz}$$

$$div\ A = z + ze^{yz} + 0 = z + ze^{yz}$$

معادلة المستقيم في الفضاء R^3|

The equation of the line (1) معادلة المستقيم

$Pt\ .P(x_1, y_1, z_1) \in L\ ,\qquad \vec{V} = a_i, bj, ck$

$which\ \ i, j, k//L\ then\ eq\ of$

$L\ is \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$

مثال

جد معادلة المستقيم التي تمر بالنقطة $P(2,4,-1)$ فيكون موازي للمتجه $v = 2i - 3j + k$

الحل

$Since$

$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$

$\Longrightarrow x_1 = 2\ \ ,\ y_1 = 4\quad ,\qquad z_1 = -1$

$a = 2\quad ,\ b = -3\quad ,\qquad c = 1$

$L\ is\ \dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y - 4}{-3} = \dfrac{z + 1}{1}$

معادلة المستقيم في R^3 $\quad \frac{x-2}{2} + \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{1}$

ملاحظة

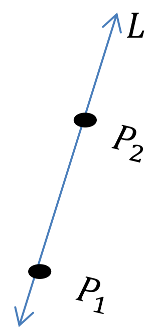
لتكن لدينا $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ نقتطتين في الفضاء R^3 فإن المسافة بين النقطتين تعرف كالأتي :

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

مثال

اذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $P_1(2,1,3)$, $P_2(3,4,-1)$ جد معادلة المستقيم

الحل



$$Let\ , \overrightarrow{W} = \overline{P_1P_2} = (3-2)i + (4-1)j + (-1-3)k$$

$$W = i + 3j - 4k // L$$

معادلة المستقيم في R^3 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-4}$

مثال

جد المسافة بين بالنقطة $P(2,3,4)$ التي تقع في الفضاء R^3 والمستقيم

$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{2-z}{3}$$

الحل

$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y-(-1)}{4} = \frac{2-z}{-3}$$

النقطة التي تقع على المستقيم هي $P'(2,-1,2)$

$$d = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-3)^2 + (2-4)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

(2) معادلة المستوي R^3 The equation the Plare

$Let\ P(x_0, y_0, z_0) \in \pi\ and\ V = ai + bj + ck$

$which\ is\ v \perp \pi\ then$

$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$

$if\ D = ax_0 + by_0 + cz_0\ \ , D \in R$

$Then$

$ax + by + cz = D$

مثال

جد معادلة المستوي π الذي يحتوي على النقطة $P(1,2,-1)$ وان المتجهه

$$v = 2i - 3j + k \perp \pi$$

الحل

$ax + by + cz = D$

$D = ax_0 + by_0 + cz_0$

$\quad = 2(1) + (-3)(2) + 1(-1)$

$\quad = 2 - 6 - 1 = -5$

معادلة المستوي $2x - 3y + z = -5$

مثال

اذا كان لدينا المستوي $\pi: 3x + 4y - 2z = 2$ جد اي نقطة تقع في π , $P \in \pi$

الحل

من معادلة المستوي نجد ان المتجه العمودي

$$v = 3i + 4j - 2k$$

وان $D = 2$

$$2 = ax_0 + by_0 + cz_0$$

$$2 = 3x_0 + 4y_0 - 2z_0$$

Let

$$x_0 = 1 , y_0 = -1$$

$$\Longrightarrow 3(1) + 4(-1) - 2z = 2$$

$$3 - 4 - 2z_0 = 2$$

$$-1 - 2z_0 = 2$$

$$-2z_0 = 3$$

$$z_0 = -\frac{3}{2}$$

$$P\left(1, -1, -\frac{3}{2}\right) \in \pi$$

ملاحظة

لتكن $P(x_0, y_0, z_0)$ نقتطة في الفضاء R^3 فإن المسافة بين تلك النقطة P والمستوي

$$\pi : \ ax + by + cz = D$$

تعرف كالأتي :

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c\left(z_0 - \frac{D}{c}\right)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$where$

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad , \qquad v = ai + bj + ck \in \pi$$

مثال : الواجب

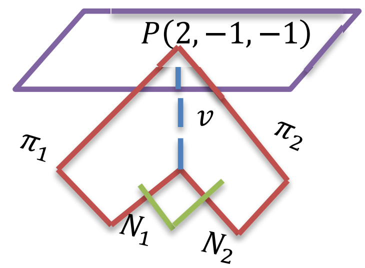
جد المسافة بين النقطة $P(2,1,3)$ والمستوي $\pi : x + 2y - z = 2$

مثال

جد معادلة المستوي المار بالنقطة $P(2,-1,-1)$ والعمود على المستقيم تقاطع المستويين

$$\pi_1 : 2x + y - z = 3 \quad , \quad \pi_2 : 4x + 2z - y = 7$$

الحل



$N_1 = 2i + j - k \perp \pi_1$

$N_2 = 4i + 2k - j \perp \pi_2$

$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i(2-1) - j(4+4) + k(-2-4)$$

$$= i - 8j - 6k$$

$L = N_1 \times N_2 \; //v \quad , \quad v \perp \pi_3$

$\Longrightarrow \; L \perp \pi_3$

$ax + by + cz = D = ax_0 + by_0 + cz_0$

$Since\ P(2,-1,-1) \Longrightarrow x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = -1$

$Since\ L = i - 8j - 6k$

$\Longrightarrow a = 1, b = -8, c = -6$

$\Longrightarrow D = 1(2) + (-8)(-1) + (-6)(-1)$

$\quad = 2 + 8 + 6 = 16$

معادلة المستوي

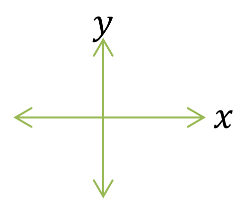
$x - 8y - 6z = 16$

الطباعة و التصميم : حسنين مهداوي

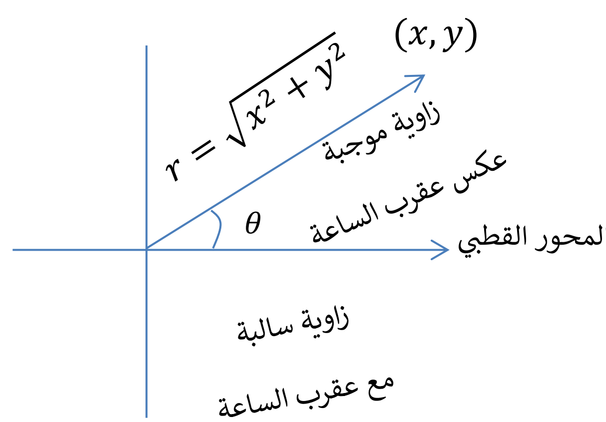
الاحداثيات في الفضاء

1 الاحداثيات الكارتيزية في الفضاء $|R^2$

هي احداثيات (x, y) في المستوي $|R^2$



الاحداثيات القطبية

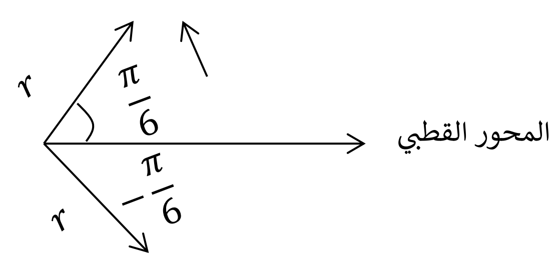


$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

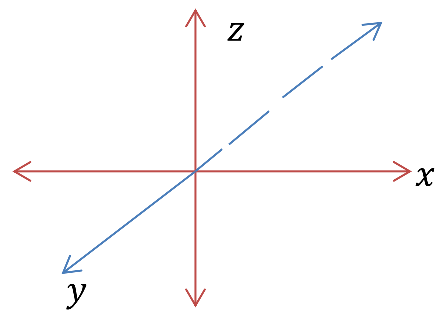
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



الطباعة و التصميم: حسنين مهداوي

2 الاحداثيات الكارتيزية في الفضاء $|R^3$

هي احداثيات (x, y, z)



الاحداثيات الاسطوانية

(r, θ, z)

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

مثال

حول النقاط التالية الى الاخاثيات الاسطوانية

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) \quad , \qquad P(1,1,1)$$

الحل

1) $P(1,1,1) \quad , \quad x = 1 \,, \quad y = 1 \,, \quad z = 1$

$\theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,, z = z = 1$

$P(1,1,1) \Longrightarrow P(r, \theta, z) = \left(\sqrt{2}\,, \frac{\pi}{4}, 1\right)$

$$2)\ P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)\ ,x=\frac{1}{2},\qquad y=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad z=2$$

$$\theta=\tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}\ ,r=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

$$P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)\Longrightarrow P(r,\theta,z)=\left(1,\frac{\pi}{3},2\right)$$

مثال

اكتب المعادلة الكارتيزية التالية بأستخدام الاحداثيات الاسطوانية

$$z^2=x^3+2x^2y^2+y^3$$

الحل

$$x=r\cos\theta\quad,\quad y=r\sin\theta\qquad ,z=z$$

$$z^2=(r\cos\theta)^3+2(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2+(r\sin\theta)^3$$

$$=r^3\cos^3\theta+2\,r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+r^3\sin^3\theta$$

$$=r^3\cos^3\theta+2\,r^4(\cos\theta\sin\theta)^2+r^3\sin^3\theta$$

$$=r^3\cos^3\theta+2\,r^4\left(\frac{\sin2\theta}{2}\right)^2+r^3\sin^3\theta$$

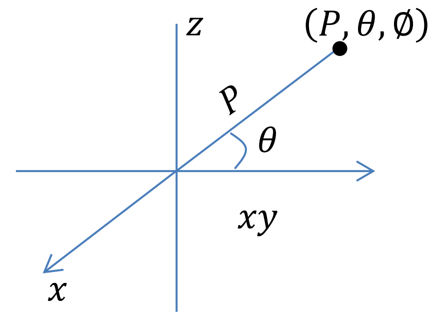
$\sin c\ [\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$$=r^3\,cos^3\,\theta+\frac{r^4}{2}\sin^2 2\theta+r^3\sin\theta$$

3

الاحداثيات الكروية

هي احداثيات $(P,\theta,\emptyset)$ بحيث ان



$$x = P\cos\theta\sin\theta$$

$$y = P\sin\theta\sin\emptyset$$

$$z = P\cos\emptyset$$

$$P = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

θ الزاوية التي يصنعها محور P مع المستوي xy

$\emptyset$ الزاوية التي يصنعها P مع z

مثال: الواجب

اكتب المعادلة الكارتيزية بأستخدام الاحداثيات الكروية بأبسط صورة

$$x^2 + 4x + y^2 - 3y + z^2 = 2$$

المعادلات التفاضلية الاعتيادية Ordinary Differenties Equation (ODE)

المعادلة التفاضلية

هي معادلة تحتوي على دالة معلومة ومشتقاتها مثلاً

$$1)\ \frac{dy}{dx} = 5x + 3 \qquad ODE$$

$$2)\ e^{y}\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

$$3)\ \frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$ معادلة تفاضلية جزئية

المعادلة التفاضلية الاعتيادية

هي معادلة تحتوي على دالة تعتمد على متغير مستقل واحد و على مشتقات اعتيادية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = e^{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' \quad , \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$$

بصورة عامة

رتبة المعادلة التفاضلية

هي اعلى مشتقة في المعادلة مثل :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx} = e^{x}$$ رتبة ثالثة

درجة الجبريةللمعادلة التفاضلية

هي اعلى اس لأعلى مشتقة في المعادلة مثلاً

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^6 -\frac{dy}{dx}=\cos x$$

الرتبة الرابعة

الدرجة الاولى

الشروط الاولية

المعادلة التفاضلية الاعتيادية تمتلك حل يمثل علاقة بين المتغير المعتمد y والمستقل x لذلك فإن الشروط الاولية تمثل قيمة y اذا علمت قيمة x .

تصنيف المعادلات ODEs

1) **الشكل الجاهز (Standard form)**

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

المشتقات في جهه و الدوال في جهه اخرى

2) **المعادلات الخطية** : هي المعادلات التي تأخذ الشكل التالي

$$y' + P(x)y = q(x)$$

3) **معادلات برنولي** : هي المعادلات التي تأخذ الشكل التالي

$$y' + P(x)y = q(x)y^n \quad if\ n = 1\ or\ n = 0$$

$$y' + P(x)y = q(x)$$ النوع الثاني

4) **مفصولة المتغيرات** : هي المعادلات التي تأخذ الشكل التالي

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

بحيث ان

$$M(x, y) = A(x)$$

$$N(x, y) = B(y)$$

$$\Longrightarrow A(x)dx + B(y)dy = 0$$

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c \quad , \quad c \in R$$

مثال

حل المعادلة

$$xdx - y^2dy = 0$$

الحل

$A(x) = x \quad , \qquad B(y) = -y^2$ مفصولة المتغيرات

$$A(x)dx + B(y) = 0$$

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = 0$$

$$\int x\,dx - \int y^2 = c$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c \Longrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - c$$

$$Let\ k = -3c$$

$$y^3 = \frac{3}{2}x^2 + k$$

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + k\right)^{1/3}$$

ملاحظة

لإيجاد الحل الخاص بحيث ان تستعمل الشروط الاولية $y(x_0) = y_0$ وهذه الشروط يجب ان تعطى بالسؤال .

مثال

حل المعادلة

$$xdx - y^2dy = 0$$

الحل

$y(0) = 1 \Longrightarrow y = 1\,, x_0 = 0$

$y(x) = \left(\frac{3x^2}{2} + k\right)^{1/3} \quad , y(0) = 1$

$1 = \sqrt[3]{k}$

$k = 1$

$y(x) = \left(\frac{3x^2}{2} + 1\right)^{1/3}$ الحل الخاص

مثال

حل المعادلة

$$e^x dx - ydy = 0 \quad , y(0) = 1$$

الحل

$e^x dx - ydy = 0$ مفصولة المتغيرات

$\int e^x dx - \int y\,dy = 0$

$e^x - \frac{y^2}{2} = c \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = e^x - c$

$y^2 = 2e^x - 2c$

$Let - 2c = k$

$y = (2e^x + k)^{1/2}$ الحل العام للمعادلة

$since\ y(0) = 1$

$1 = (2e^0 + k)^{1/2}$

$(2 + k)^{1/2} \Rightarrow 2 + k = 1 \Rightarrow k = -1$

$y(2e^x - 1)^{1/2}$ الحل الخاص

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى و الدرجة

المعادلات التي يمكن حلها بطرق مباشرة

1) المعادلات التي يمكن فصل متغيراتها

2) معادلات التفاضلية التامة

3) معادلات التفاضلية خطية

4) معادلات التفاضلية من نوع برنولي

5) معادلات التفاضلية ذات معاملات خطية

1) المعادلات التي يمكن فصل متغيراتها

وتأخذ الصيغة التالية

$$g(x)dx + h(y)dy = 0$$

والحل العام هو

$$\int d(x)dx + \int h(y)dy = c$$

مثال

حل المعادلة

$$x^2(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

الحل

$$[x^2(1-y^2)dx + y(1+x^2)dx = 0] \div \frac{1}{(1-y^2)(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(1-y^2)}{(1-y^2)(1+x^2)}dx + \frac{y(1+x^2)}{(1-y^2)(1+x^2)}\ dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(1+x^2)}dx + \frac{y}{(1-y^2)}dy = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{(1+x^2)}dx + \int \frac{y}{(1-y^2)}dy = c$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2y}{1-y^2}dy = c$$

$$\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\ln(1-y^2) = c$$

$$\Rightarrow \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(1-y^2) = c$$

$$\Rightarrow x - \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1-y^2) = c$$

الواجب جد الحل الخاص اذا كان $y(0) = 1$

مثال

حل المعادلة

$$xydy + (2yx^2 + 4x^2 - y - 2)dx = 0$$

الحل

$$xy\,dy + [2x^2(y+2) - (y+2)]dx = 0$$

$$[xydy + (y+2)(2x^2-1)dx = 0] \div \frac{1}{x(y+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{xydx}{x(y+2)} + \frac{(y+2)(2x^2-1)dx}{x(y+2)} = 0$$

$$\frac{ydy}{y+2} + \frac{2x^2-1}{x}dx = 0$$

$$\int \frac{ydy}{y+2} + \int \left(2x - \frac{1}{x}\right) dx = c$$

$$\int \frac{y+2-2}{y+2}dy + \int (2x - \frac{1}{x})\, dx = c$$

$$\Rightarrow \int \left(1 - \frac{2}{y+2}\right) dy + x^2 - \ln x = c$$

$y - 2\ln(y+2)\, x^2 - \ln x = c$ الحل العام

مثال الواجب

حل المعادلة مستخدماً فصل المتغيرات

1) $x\,dy - (1+x)ydx = 0$

2) $x\,(1-y)\dfrac{dy}{dx} + y(1+x) = 0$

3) $(1+y^2)dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$

2) معادلات تفاضلية متجانسة

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

فأنهما تسمى متجانسة من الدرجة n اذا

شرط $\left(\left(f(tx,ty) = t^n f(x,y)\right)\right)$

فمثلاً

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x,y)$$

$$f(tx,ty) = \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = t\sqrt{x^2 + y^2} = t\,f(x,y)$$

مثال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = f(x,y)$$

الحل

$$f(tx,ty) = \frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} = t^0\,y.x = t^0\,f(x,y)$$

طريقة حلها تتم حسب الفرضيات التالية

$$v = \frac{y}{x} \to y = vx$$

$$dy = xdv + vdx$$

ثم نعوض هذه الفرضيات في المعادلة لكي تحصل على معادلة ويمكن فصل متغيراتها

الطباعة و التصميم : حسنين مهداوي

مثال

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$$

الحل

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx \,\} \div dx$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = f(x,y)$$

$$f(tx,ty) = \frac{ty + t\sqrt{x^2 + y^2}}{tx} = \frac{t\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{tx}$$

$$= t^0 f(x,y)$$ متجانسة

$$\left[xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx\right] \div x$$

$$dy - \frac{y}{x}dx = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}dx$$

$$dy - \frac{y}{x}dx = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}dx}$$

$$Let\ \ v = \frac{y}{x}$$

$$dy - v\,dx = \sqrt{1 + v^2}dx$$

$$dy = v\,dx + xdv$$

$$\Longrightarrow v\,dx + x\,dv - v\,dx = \sqrt{1 + v^2}dx$$

$$x\,dv = \sqrt{1 + v^2}dx \,\} \div \frac{1}{x\sqrt{1 + v^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} - \int \frac{1}{x}dx = c$$

الحل العام واجب

مثال

حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$(x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$$

الحل

$$(x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 0 \,\} \div x^2$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$$

$$Let\ v = \frac{y}{x} \Longrightarrow dy = x\,dv + v\,dx$$

$$\Longrightarrow (1+v^2)dx - 2v\,(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$(1+v^2)dx - 2vx\,dv - 2v^2\,dx = 0$$

$$dx + v^2dx - 2v\,dv - 2\,v^2dx = 0$$

$$dx - v^2dx - 2vx\,dv = 0$$

$$(1-v^2)dx - 2vx\,dv = 0 \,\} \div \frac{1}{(1-v^2)x}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2v\,dv}{1-v^2} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(-2v)dv}{1-v^2} = c$$

$$\ln x + \ln(1 - v^2) = c$$

$$\ln\big(x(1 - v^2)\big) = c$$

$$\ln\left(x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)\right) = c$$ الحل العام

مثال : الواجب

حل المعادلة التفاضلية المتجانسة مع ذكر درجة التجانس

$$xy^2\,dy - (x^3 + y^3)dx = 0$$

Math

2022-2023