وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ذي قار / كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الرياضيات / المرحلة الثانية
الدراستين الصباحية والمسائية

نظم البديهيات والهندسة

نظم البديهيات والهندسة
The Axiomatic System نظم البديهيات

يتكون النظام البديهي من العناصر التالية:

أولا: الكلمات الأولية (الكلمات غير المعرفة): Undefined terms

وهي مجموعة كلمات في النظام البديهي تقبل بدون تعريف وهي على نوعين:
أ- الكلمات التقنية "Technical Terms"
وهي مجموعة كلمات تكتب في بداية تعريف النظام البديهي وتعتبر أساس بناء النظام البديهي وغالبا ما تكون قليلة العدد ومن الأمثلة عليها (النقطة, الخط, التطابق, البين,...)
ب- الكلمات المنطقية "Logical Terms"
وهي مجموعة من الكلمات تكون مشتركة بين معظم الأنظمة البديهية ومبنية على أساس المنطق الرياضي ومثال عليها (كل, يوجد, على الأقل, على الأكثر,...)

ثانيا: الكلمات المعرفة: Defined terms

لا يمكن استخدام أي مصطلح في الرياضيات إلا بعد تعريفه ومن الشروط الواجب توفرها في التعريف هي:

أ- **البساطة:** يشترط في التعريف أن يحتوي على أشياء بسيطة وواضحة بحيث يعتمد على كلمات معرفة سابقا أو كلمات أولية. لقد عرف إقليدس النقطة بأنها الشيء الذي لا بعد له وعرف المستقيم بأنه الشيء الذي له طول وليس له عرض وهذه التعاريف غير مقبولة لأنها تحتوي على كلمات غير معرفة (البعد, الطول, العرض).
ب- **غير دوري:** أي انه يجب إن لا نعرف س بدلاله ص ثم نعرف ص بدلاله س. فمثلا عندما نقول بان المستقيم هو مجموعة من النقاط ثم نعرف النقطة بأنها تقاطع مستقيمين فان هذا التعريف غير مقبول لأنه دوري.
ت- **الوحدانية:** أي إن التعريف لكلمه ما يجب إن يكون بطريقة بحيث لاينطبق هذا التعريف على كلمة أخرى. فمثلا تعريف المستقيم بأنه مجموعة من النقاط هو تعريف غير مقبول لأنه ينطبق أيضا على الدائرة والمربع والمثلث.

ثالثا: البديهيات : Axioms

وهي فرضيات بسيطة التركيب وواضحة البيان وقليلة العدد وصادقه دائما في النظام البديهي ولا تحتاج إلى برهان وتتكون البديهيات من الكلمات الأولية والكلمات المعرفة. لقد عرف هلبرت البديهية بأنها (فرضيه حول الكلمات الأولية) وعرف باسكال البديهية بأنها (بلغت حدا من الوضوح بحيث يستحيل الحصول على جملة أوضح منها للبرهنة عليها).
البديهيات تختص بالنظام البديهي المعني ويمكن إن تكون احد البديهيات في نظام بديهي معين مبرهنة في نظام بديهي أخر.

رابعا: المبرهنات: Theorems

وهي حقيقة داخل النظام البديهي وتحتاج إلى برهان ويكون البرهان إما باستخدام البديهيات أو باستخدام المبرهنات السابقة التي تم برهنتها أي إن المبرهنة هي استنتاج منطقي من النظام البديهي.

ملاحظة: تعتبر الهندسة احد الأمثلة على الأنظمة البديهية ويقال على النظام البديهي بأنة منتهي إذا احتوى على عدد محدد من النقاط وبعكسه فان النظام يكون غير منتهي.

اولا- المستوي الاسقاطي:Projective Plane

يعتبر المستوي الاسقاطي مثال لنظام بديهي حيث يرمز لهذا المستوي بالرمز (π)و يحتوي على الكلمات الأولية (النقطة والخط) حيث سنرمز للنقاط بالحروف الكبيرة A,B,C,... وللخطوط بالحروف الصغيرة l,m,n,... , وبديهيات هذا المستوي هي:

A1: أي نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.

A2: كل خط يحتوي على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة.

A3: يوجد على الأقل خط وتوجد على الأقل نقطة بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.

A4: كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل.

مبرهنة 1: كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة فقط.

المفروض: m, n خطين مختلفين في المستوي الاسقاطي.

م. ث. : الخطين m, n يشتركان في نقطة واحدة فقط.

البرهان: حسب البديهية [A4] توجد نقطة مثل Q مشتركة بين الخطين m, n

نفرض وجود نقطة أخرى مشتركة بين الخطين m, n هي النقطة P

∴ الخطين m, n يشتركان بنقطتين مختلفتين

∴ حسب بديهية [A1] فان m=n وهذا خلاف الفرض لان m, n خطين مختلفين

∴ الخطين m, n يشتركان بنقطة واحدة فقط

مبرهنة 2: كل نقطة في المستوي الاسقاطي يمر بها ثلاثة خطوط مختلفة على الأقل.

المفروض: Q نقطة في المستوي الاسقاطي.

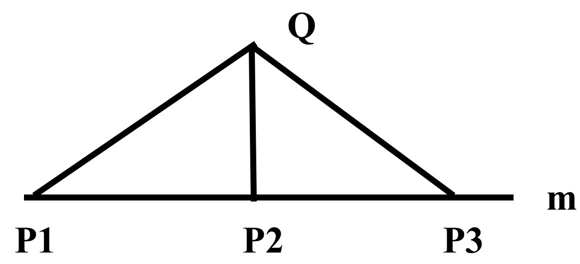
م.ث.: النقطة Q يمر بها ثلاثة خطوط مختلفة على الأقل.

البرهان: يوجد خط مثل m لا يمر من النقطة Q. [A3]

حسب البديهية [A2] توجد ثلاث نقاط مختلفة على الخط m مثل P1, P2, P3

∴ يوجد خط بين بالنقطتين Q, P1
يوجد خط بين بالنقطتين Q, P2   [A1]
يوجد خط بين بالنقطتين Q, P3

∴ توجد ثلاث خطوط مختلفة على الأقل تمر من النقطة Q وهي QP1, QP2, QP3



ملاحظات:

1. { واحد فقط }= { على الأقل } ∩ { على الأكثر }
2. العبارات التالية متكافئة:

(النقطة P تقع على الخط m, الخط m يحتوي على النقطة P, الخط m يمر من النقطة P, النقطة p تنتمي إلى الخط m).

3. العبارات التالية متكافئة:

(النقطة P تنتمي إلى الخطين l, m , الخطين l, m يتقاطعان في النقطة P , النقطة P تقع على الخطين l, m ,الخطين l, m يشتركان في النقطة P).

المستوي الاسقاطي المنتهي:

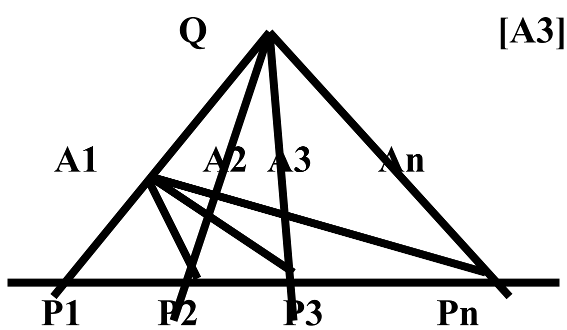
هو مستوي إسقاطي يحتوي على مجموعة منتهية من النقاط والخطوط.

مبرهنة 3: اذا وجد خط في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

المفروض: l خط في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,...,Pn

م. ث.: عدد نقاط المستوي الاسقاطي بالضبط n^2-n+1

البرهان: توجد نقطة مثل Q لا تقع على الخط l. [A3]



يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P1 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P2 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P3 [A1]

.
.
.

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, Pn [A1]

أي انه يوجد n من الخطوط المختلفة

توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط ولتكن A1, A2, A3, ...,An [A2]

من النقطة A1 نرسم الخطوط A1P2, A1P3, A1P4,...,A1Pn [A1]

وهذه الخطوط تقطع الخط QP2 في n-1 من النقاط بالإضافة الى النقطة Q. [A4]

وبنفس الطريقة نثبت بان الخطوط QP1, QP3, ..., QPn تحتوي على n-1 من النقاط بالاضافة الى النقطة Q

∴ عدد النقاط=$n(n-1)+1= n^2-n+1$

ولكي نثبت بان عدد النقاط هو بالضبط n^2-n+1

نفرض وجود نقطة مختلفة مثل B لا تقع على أي من هذه الخطوط

∴ يوجد خط مثل QB [A1]

∴ الخط QB يقطع الخط l في نقطة جديدة هي Pn+1 (مبرهنة1)

∴ عدد نقاط الخط l هي n+1 وهذا خلاف الفرض

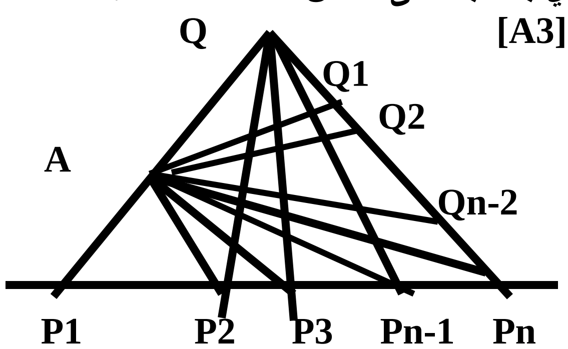
∴ عدد النقاط بالضبط هو n^2-n+1

نتيجة: اذا وجد خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان أي خط اخر يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.

المفروض: l مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,...,Pn

م. ث.: أي خط اخر في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.

البرهان: توجد نقطة مثل Q لا تقع على الخط l .[A3]



يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P1 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P2 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P3 [A1]

.

.

.

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, Pn [A1]

توجد نقطة ثالثة مثل A على الخط QP1 [A2]

يوجد خط يمر بالنقطتين AP2 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين AP3 [A1]

.

.

.

يوجد خط يمر بالنقطتين APn-1 [A1]

الخط AP2 يقطع الخط QPn في نقطة مثل Q1 [A4]

الخط AP3 يقطع الخط QPn في نقطة مثل Q2 [A4]

.

.

.

الخط APn-1 يقطع الخط QPn في نقطة مثل Qn-2 [A4]

$\therefore$ الخط QPn يحتوي على n من النقاط Q, Q1, ...,Qn-2, Pn

$\therefore$ عدد نقاط الخط QPn هو n من النقاط

و اذا فرضـــنا بان الخط QPn يحتوي على نقطة اضـــافية ولتكن B فان يوجد خط يمر بالنقطتين A, B [A1] و يقطع الخط l في نقطة جديدة ولتكن Pn+1 [A4] وهذا خلاف الفرض لان عدد نقاط الخط l هي بالضبط n من النقاط

$\therefore$ يوجد بالضبط n من النقاط المختلفة على الخط QPn.

ثانيا- المستوي التالفي (الافيني) : Affine Plane

يرمز لهذا المســـتوي بـالرمز(α) ويحتوي على الكلمـات التقنيـة (النقطـة والخط) ويحتوي على البديهيات التالية:

A1: كل نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.

A2: كل خط يحتوي على ثلاثة نقاط مختلفة على الأقل.

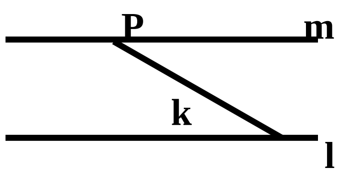
A3: توجد على الأقل نقطة ويوجد على الأقل خط بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.

A4: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من النقطة P ويوازي المستقيم l.

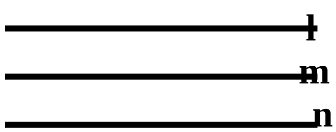
ملاحظة: الخطوط في المســتوي الاســقاطي تكون متقاطعة دائما بينما في المســتوي التالفي يمكن ان تكون متوازية او متقاطعة.

مبرهنة 1 : كل خطين مختلفين في المستوي التالفي يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.
المفروض : l, m خطين مختلفين في المستوي التالفي.
م. ث. : l, m يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.
البرهان : نبرهن بطريقة التناقض
نفرض ان الخطين l, m يشتركان في نقطتين مختلفتين مثل A, B
∴ حسب [A1] فان $l=m$ وهذا خلاف الفرض لان l, m خطان مختلفان
∴ الخطين l, m يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر.

مبرهنة 2: المستقيم القاطع لأحد مستقيمين متوازيين يقطع الأخر.
المفروض: l, m مستقيمين متوازيين و k مستقيم يقطع m في النقطة P
م. ث. : المستقيم k يقطع l
البرهان: سنبرهن بطريقة التناقض
نفرض ان المستقيم k يوازي l
∵ المستقيم m يوازي l [بالفرض]
∴ المستقيمان k, m يوازيان المستقيم l من نقطة P
وهذا غير ممكن حسب [A4]
∴ k لا يوازي l ⇐ k قاطع الى l.



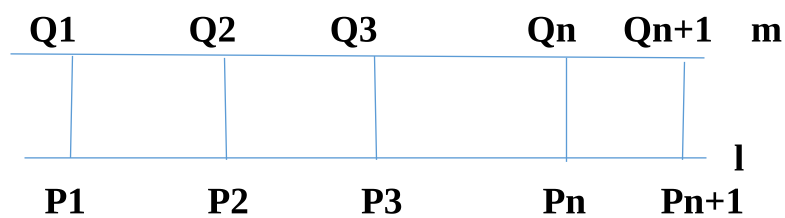
مبرهنة 3: المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان.
المفروض: المستقيم l يوازي n والمستقيم l يوازي m
م. ث.: المستقيم n يوازي المستقيم m
البرهان : نبرهن بطريقة التناقض
نفرض ان المستقيم m يقطع المستقيم n في النقطة P
∴ من نقطة واحدة وهي P يوجد مستقيمان موازيان الى l وهذا خلاف [A4]
∴ المستقيم m يوازي المستقيم n.



المستوى التالفي المنتهي:
وهو مستوي تالفي يحتوي على عدد منتهي من العناصر (النقاط , الخطوط).

مبرهنة 4: اذا وجد خط يحتوي بالضـــبط على n من النقاط المختلفة فان أي مســـتقيم اخر يوازيه يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.
المفروض: l خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة $P1,P2,P3,...,Pn$
م. ث.: أي خط يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.
البرهان: توجد نقطة مثل $Q1$ لا تقع على الخط l. [A3]
يوجد خط مثل m يمر من النقطة $Q1$ ويوازي الخط l [A4]
سنبرهن وجود n من النقاط على الخط m

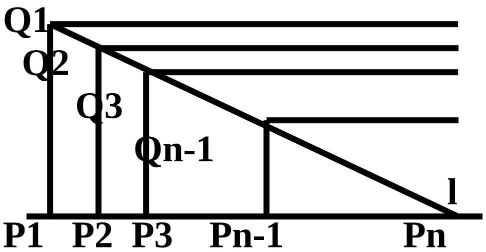
يوجد خط بين النقطتين Q1, P1 [A1]
وبما ان النقطة P2 لا تقع على الخط Q1P1
∴ يوجد خط يمر من النقطة P2 وموازي الى الخط P1Q1 [A4]
ويقطع الخط m في نقطة Q2 [مبرهنة 2]
وبنفس الطريقة نحصل على النقاط Q3, ... , Qn
∴ الخط m يحتوي على n من النقاط المختلفة Q1, Q2, ..., Qn
ولكي نبرهن أن الخط m يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة
نفرض وجود نقطة أضافية مثل Qn+1 على الخط m
وبما إن النقطة Qn+1 لا تقع على الخط Q1P1
∴ يوجد خط يمر من النقطة Qn+1 ويوازي الخط Q1P1 ويقطع الخط l في نقطة جديدة مثل Pn+1 [مبرهنة 2]
∴ أصبح عدد نقاط الخط l هو n+1 وهذا خلاف الفرض
∴ الخط m يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة



مبرهنة 5: أذا وجد خط يحتوي بالضــبط على n من النقاط المختلفة فان يوجد بالضــبط n-1 من الخطوط الموازية له.

المفروض: l خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,...,Pn
م. ث.: يوجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية إلى الخط l
البرهان: توجد نقطة مثل Q1 لا تقع على الخط l. [A3]
يوجد خط يمر بالنقطتين Q1P1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين Q1Pn [A1]
من النقطة P2 يمكن رسم خط موازي إلى Q1P1 ويقطع الخط Q1Pn في نقطةQ2 [A4+ مبرهنة 2]
وبنفس الطريقة نحصل على النقاط Q3, Q4, ..., Qn-1
من النقطة Q1 يوجد خط واحد فقط يوازي l [A4]
وبنفس الطريقة يوجد خط واحد فقط موازي إلى l من كل نقطة من النقاط Q2, Q3, ..., Qn-1
∴ يوجد n-1 من الخطوط الموازية إلى l
ولكي نبرهن انه توجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية إلى l
نفرض وجود خط أضافي موازي إلى l وليكن الخط m
الخط m يقطع الخط Q1Pn في نقطة مثل A [مبرهنة 2]

من النقطة A التي لا تقع على الخط P1Q1 يمكن رســم خط موازي إلى الخط P1Q1 ويقطع الخط l في نقطة مثل Pn+1 [A4+مبرهنة 2]
وبذلك أصبح عدد نقاط الخط l هو n+1 وهذا خلاف الفرض
∴ يوجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية إلى l



مبرهنة 6: أذا وجد خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان أي خط أخر يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.

المفروض: l خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,...,Pn
م. ث.: أي خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة
البرهان: نفرض وجود خط أخر مثل m
ففي حالة أن m يوازي l فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة [مبرهنة 4]
إما في حالة أن m يقطع l
∴ حسب مبرهنة 5 فانه يوجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية إلى l
وبما إن m يقطع l
∴ حســب مبرهنة 2 فان m يقطع n-1 من الخطوط الموازية إلى l في n-1 من النقاط المختلفة بالإضــافة إلى نقطة التقاطع مع l
∴ m يحتوي على n من النقاط المختلفة
وإذا فرضنا أن m يحتوي على نقطة أضافية فانه من هذه النقطة يمكن رسم موازي إلى l وبذلك يصبح عدد الخطوط الموازية إلى l هي n من الخطوط وهذا خلاف لمبرهنة 5
∴ يوجد بالضبط n من النقاط المختلفة على الخط m

تمارين:

1-أذا وجد خط في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة برهن على إن:
أ- أي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من الخطوط المختلفة.
ب- يوجد بالضبط n^2-n+1 من الخطوط في النظام.

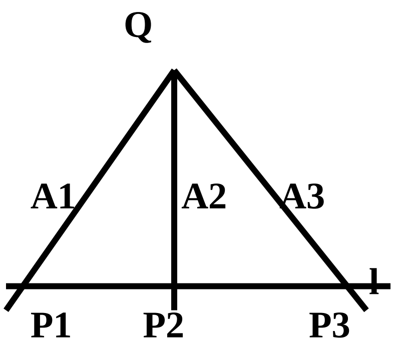
2- أذا وجد خط في المستوي ألتالفي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة برهن على إن:
أ- يوجد بالضبط n^2 من النقاط المختلفة في النظام.
ب- أي نقطة يمر بها بالضبط n+1 من الخطوط المختلفة.
ت- يوجد بالضبط n(n+1) من الخطوط المختلفة في النظام.

ثالثاـ نظام بديهيات فانو : The System of fano

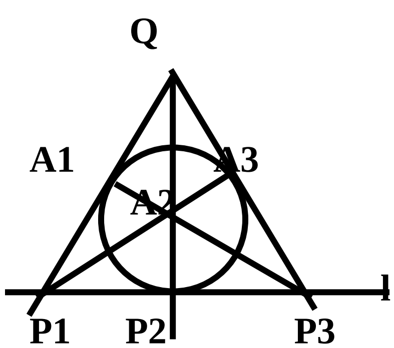
عند إضافة البديهية التالية الى نظام بديهيات المستوي الاسقاطي نحصل على نظام بديهيات فانو (كل خط يحتوي على الأكثر ثلاث نقاط مختلفة).
و بما إن البديهية الثانية تنص على إن : " كل خط يحتوي على الأقل ثلاث نقاط مختلفة "
∴ يمكن صياغة البديهيتين أعلاه كالأتي: " كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة ".

نظام بديهيات فانو هو:

A1: أي نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة
A3: توجد على الأقل نقطة ويوجد على الأقل خط بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.
A4: كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل.



مبرهنة 1: يحتوي نظام بديهيات فانو على سبعة نقاط فقط.
المفروض: نظام بديهيات فانو.
م. ث. : عدد نقاط نظام بديهيات فانو هي بالضبط سبعة نقاط.
البرهان: يوجد خط مثل l وتوجد نقطة مثل Q لا تقع علية [A3]
يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة على الخط l وهي P1, P2, P3 [A2]
يوجد خط بين النقطتين Q-P1, Q-P2, Q-P3 [A1]
توجد نقاط مثل A1, A2, A3 على الخطوط QP1, QP2, QP3 [A2]
∴ توجد سبعة نقاط مختلفة وهي: Q, P1, P2, P3, A1, A2, A3
نفرض وجود نقطة إضافية, فان هذه النقطة اما ان تقع على احد الخطوط وبذلك يصبح عدد نقاط ذلك الخط أربعه نقاط وهذا خلاف [A2], او انها لا تقع على أي من الخطوط وبذلك يمكن رسم خط من هذه النقطة يمر بنقطة Q ويقطع l في نقطة رابعة[P] وهذا خلاف [A2]
∴ يوجد بالضبط سبعة نقاط مختلفة.



مبرهنة 2: يحتوي نظام بديهيات فانو على سبعة خطوط فقط.
المفروض: نظام بديهيات فانو.
م. ث. : يوجد سبعة خطوط مختلفة فقط في نظام بديهيات فانو.
البرهان: يوجد خط مثل l وتوجد نقطة مثل Q لا تقع علية [A3]
يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة على الخط l وهي P1, P2, P3 [A2]
يوجد خط بين النقطتين Q-P1, Q-P2, Q-P3 [A1]
توجد نقطة ثالثة مثل A1 على الخط QP1 [A2]
توجد نقطة ثالثة مثل A2 على الخط QP2 [A2]
توجد نقطة ثالثة مثل A3 على الخط QP3 [A2]
يوجد خط بين النقطتين A1, A2 ويمربالنقطة P3 [A1+A2]
يوجد خط بين النقطتين A2, A3 ويمر بالنقطة P1 [A1+A2]
يوجد خط بين النقطتين A1, A3 ويمر بالنقطة P2 [A1+A2]
∴ توجد سبعة خطوط مختلفة في النظام وهي: QP1, QP2, QP3, A1A3, A1A2, A2A3,l

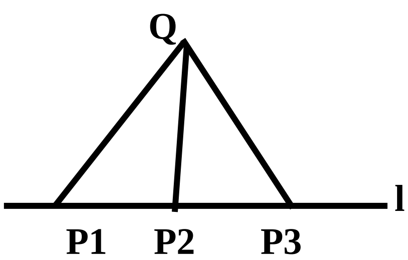
نفرض وجود خط اضافي في النظام, فان هذا الخط سوف يقطع جميع خطوط النظام وبذلك سيكون كل خط يحتوي على الاقل على اربعة نقاط مختلفة وهذا خلاف A2.

∴ يوجد بالضبط سبعة خطوط مختلفة في النظام.

مبرهنة 3: كل نقطة في نظام بديهيات فانو يمر بها بالضبط ثلاث خطوط.

المفروض: Q نقطة في نظام بديهيات فانو.

م. ث.: النقطة Q يمر بها بالضبط ثلاث خطوط.



البرهان: يوجد خط مثل l لا يمر بالنقطة Q [A3]

توجد ثلاث نقاط فقط على الخط l وهي P1, P2, P3 [A2]

يوجد خط بين النقطتين Q-P1, Q-P2, Q-P3 [A1]

∴ يوجد ثلاث خطوط تمر من النقطة Q وهي QP1, QP2, QP3

نفرض وجود خط رابع يمر من النقطة Q

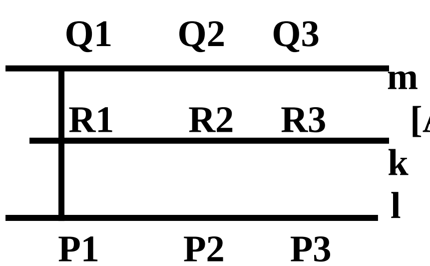
∴ هذا الخط سيقطع الخط l في نقطة رابعة [A4] وبذلك سيكون عدد نقاط الخط l هو اربعة وهذا خلاف الفرض

∴ يوجد بالضبط ثلاث خطوط مختلفة تمر من النقطة Q.

رابعا- نظام بديهيات يونك: The System of Young

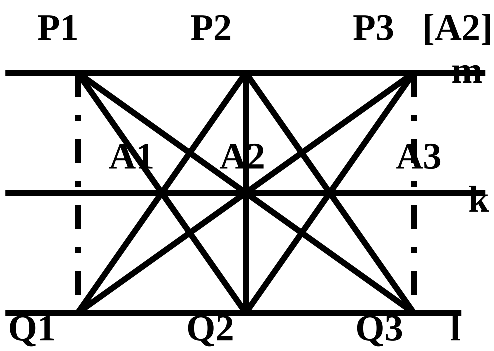
عند إضافة البديهية التالية الى نظام بديهيات المستوي التالفي نحصل على نظام بديهيات يونك (كل خط يحتوي على الأكثر ثلاث نقاط مختلفة).
و بما إن البديهية الثانية في نظام بديهيات المســـتوي التالفي تنص على إن : " لكل خط يحتوي على الأقل ثلاث نقاط مختلفة "
∴ يمكن صياغة البديهيتين أعلاه كالأتي: " كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة ".
∴ نظام بديهيات يونك هو:
A1: كل نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة.
A3: توجد على الأقل نقطة ويوجد على الأقل خط بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.
A4: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.
وبذلك يكون نظام بديهيات يونك هو نظام هندسة منتهية حيث يحتوي فيه الخط على ثلاث نقاط فقط.

مبرهنة 1: توجد بالضبط تسعه نقاط مختلفة في نظام بديهيات يونك.
المفروض: نظام بديهيات يونك.
م. ث. : يوجد بالضبط تسعه نقاط مختلفة في النظام.
البرهان: يوجد خط مثل l ونقطة مثل Q1 لا تقع علية [A3]
يوجد بالضبط ثلاثة نقاط مختلفة P1, P2, P3 على الخط l [A2]
من النقطة Q1 يوجد خط موازي الى l وليكن m [A4]
∴ يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة Q1, Q2, Q3 على الخط m [A2]
يوجد خط بين النقطتين Q1, P1 [A1]
توجد نقطة مثل R1 على الخط Q1P1 [A2]
من النقطة R1 يمكن رسم خط موازي الى l وليكن الخط k [A4]
توجد ثلاث نقاط بالضبط على الخط k وهي R1, R2, R3 [A2]
∴ توجد تسعة نقاط مختلفة في النظام هي P1, P2, P3, R1, R2, R3, Q1, Q2, Q3



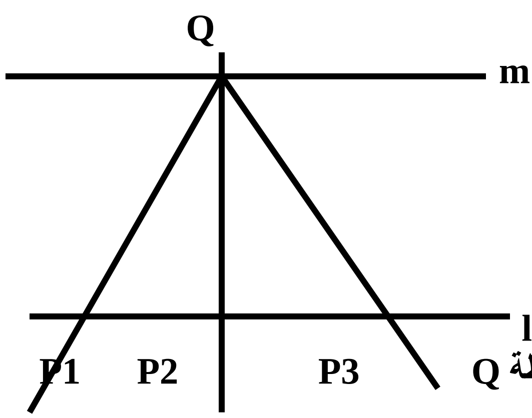
ولكي نبرهن انه يوجد بالضبط تسعة نقاط مختلفة في النظام.
نفرض وجود نقطة اضافية مثل A في النظام.
فاذا كانت هذه النقطة تقع على احد الخطوط فهذا يعني بان ذلك الخط يحتوي على اربعة نقاط وهذا خلاف [A2]. اما اذا كانت النقطة A لا تقع على أي من الخطوط فانه من هذه النقطة يمكن رســـم موازي الى l وليكن n [A4] .
وبما ان الخط P1Q1 يقطع الخط l
∴ حسب مبرهنة 2 فان P1Q1 يقطع الخط n
∴ اصبح عدد نقاط الخط P1Q1 هو اربعة نقاط وهذا خلاف [A2]
∴ يوجد بالضبط تسعة نقاط مختلفة في النظام.

مبرهنة 2: يوجد بالضبط اثنى عشر خط مختلف في نظام بديهيات يونك.
المفروض: نظام بديهيات يونك.
م. ث.: يوجد بالضبط اثنى عشر خط مختلف في نظام بديهيات يونك.
البرهان: يوجد خط مثل l ونقطة مثل P1 لا تقع علية [A3]



يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة Q1, Q2, Q3 على الخط l [A2]
يوجد خط يمر من P1 ويوازي الخط l وليكن الخط m [A4]
الخط m يحتوي على نقطتين إضافيتين هما P2, P3 [A2]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q2 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q3 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q2 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q3 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q2 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q3 [A1]
توجد نقطة مثل A1 على الخط P1Q1 [A2]
من النقطة A1 يمكن رسم خط موازي الى l وليكن الخط k [A4]
∴ يوجد اثني عشر مختلف وهي l, m, k, P1Q1, P1Q2, P1Q3, P2Q1, P2Q2, P2Q3, P3Q1, P3Q2, P3Q3.
ولكي نبرهن انه يوجد بالضبط اثني عشر خط مختلف نفرض وجود خط اضافي في النظام وليكن n
فاذا كان n موازي الى l فهذا يعني انه يقطع الخط P1Q1 في نقطة رابعة حسب مبرهنة 2 وبذلك يكون الخط P1Q1 يحتوي على اربعة نقاط وهذا خلاف [A2].
اما اذا كان n قاطع الى l فهذا يعني انه توجد اربعة نقاط على الخط l وهذا ايضا خلاف [A2].
∴ يوجد بالضبط اثني عشر خط مختلف في نظام بديهيات يونك.

مبرهنة 3: كل نقطة في نظام بديهيات يونك يمر بها بالضبط اربعة خطوط مختلفة.



المفروض: Q نقطة في نظام بديهيات يونك
م. ث. : النقطة Q يمر بها بالضبط اربعة خطوط مختلفة
البرهان: يوجد خط مثل l لا يمر النقطة Q [A3]
توجد ثلاث نقاط بالضبط على الخط l (P1, P2, P3) [A2]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q [A1]
يوجد خط يمر من النقطة Q مثل m ويوازي l [A4]
∴ توجد اربعة خطوط m, QP1, QP2, QP3 تمر من النقطة Q
نفرض وجود خط اخر مثل k يمر من النقطة Q
فاما ان يكون الخط k موازي الى l وهذا خلاف [A4]
لانه يكون لدينا خطان موازيان الى l من نقطة واحدة Q
اما اذا كان الخط k قاطع الى l فهذا يعني ان الخط l يحتوي على اربعة نقاط مختلفة وهذا خلاف [A2]
∴ يوجد بالضبط اربعة خطوط مختلفة تمر من النقطة Q.

خواص النظام البديهي: Properties of Axiomatic System

تعتبر الصفات التالية صفات اساسية لاختبار النظام البديهي من حيث:

1. الاتساق (الانسجام) Consistency
2. الاستقلال Independence
3. التمامية (الاكتمال) Completeness

اولا: الاتساق (Consistency)

وهي صفة اساسية واجب توفرها في النظام البديهي ونعني بالاتساق عدم وجود بديهيتين متناقضتين او مبرهنتين متناقضتين او بديهية تناقض مبرهنة.

تعريف : يقال عن نظام بديهي بانه متســـق اذا لم يوجد أي تناقض بين أي بديهيتين او مبرهنتين او بديهية ومبرهنة.

تعريف النموذج Model:

هو ذلك التفسير للنظام البديهي والذي يجعل كافة عبارات النظام البديهي (البديهيات والمبرهنات) جمل صادقة.

طريقة اختبار الاتساق:

اذا امكن كتابة نموذج للنظام فان النظام البديهي متســـق و الا فانه نظام بديهي غير متســـق لذلك يمثل النموذج طريقة لاختبار اتساق النظام البديهي.

س/ ناقش اتساق بديهيات المستوي الاسقاطي.

ج/ نموذج الاول :

نفرض النقاط تمثل مجموعة من الارقام ..... ,3 ,2 ,1 والخطوط هي عبارة عن اعمدة من الارقام.

$n=3$

كل خط يحتوي على (3) نقاط

كل نقطة يمر بها (3) خطوط

عدد نقاط المستوي $n^2-n+1=3^2-3+1=7$

عدد خطوط المستوي $n^2-n+1=3^2-3+1=7$

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

هذا النموذج يحقق بان نظام بديهيات المسـتوي الاسـقاطي هو نظام متسـق (ونظام بديهيات فانو هو ايضـا نظام متسق)

نموذج الثاني:

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	m10	m11	m12	m13
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$n=4$

كل خط يحتوي على (4) نقاط

كل نقطة يمر بها (4) خطوط

عدد نقاط المستوي $13= 4^2-4+1=n^2-n+1$

عدد خطوط المستوي $13= 4^2-4+1=n^2-n+1$

هذا النموذج يحقق بان نظام بديهيات المستوي الاسقاطي هو نظام متسق (ولا يحقق نظام بديهيات فانو)

س/ ناقش اتساق نظام بديهيات المستوي التالفي.

ج/ النموذج الاول:

$n=3$

كل خط يحتوي على (3) نقاط

كل نقطة يمر بها ($n+1=4$) خطوط

عدد نقاط المستوي $9=n^2$

عدد خطوط المستوي($12= n(n+1$

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	m10	m11	m12
1	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	7
2	5	4	5	6	4	5	6	4	5	6	8
3	6	7	8	9	9	7	8	8	9	7	9

هذا النموذج يبين بان نظام بديهيات يونك هو نظام متسق لانه امكن كتابة نموذج للنظام (نموذج يتكون من تسعه نقاط واثني عشر خط) ونظام بديهيات المستوي التالفي هو نظام متسق ايضا.

النموذج الثاني:

$n=4$

كل خط يحتوي على (4) نقاط

كل نقطة يمر بها ($n+1=5$) خطوط

عدد نقاط المستوي $16=n^2$

عدد خطوط المستوي($20= n(n+1$

l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7	l8	l9	l10	l11	l12	l13	l14	l15	l16	l17	l18	l19	120
1	5	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	9	10
2	6	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	11	12
3	7	9	10	11	12	10	11	12	9	11	15	9	13	14	9	13	10	14	13
4	8	13	14	15	16	16	13	14	15	12	16	10	14	15	12	16	11	16	15

هذا النموذج يبن ان نظام بديهيات المستوي التالفي هو نظام متسق

ثانيا: الاستقلال: Independence

يقال عن بديهيه ما في نظام بديهي معين بانها مستقلة اذا لم يكن بالامكان استنتاجها او برهانها بالاعتماد على البديهيات الباقية وفي حالة برهان بديهية ما بالاعتماد على البديهيات الاخرى فان هذه البديهية تكون غير مستقلة ويجب اعتبارها مبرهنة بدلا من ان تكون بديهية ويكون النظام البديهي مستقلا اذا كانت كل بديهية من بديهيات النظام مستقلة.

طريقة اختبار صفة الاستقلال:

نفرض ان النظام البديهي يتكون من البديهيات A1, A2,..., An لاختبار استقلال البديهية Ai حيث ان i=1, 2 ,..., n نقوم بالخطوتين التاليتين:

1. نثبت بان (A1, A2,..., An) مجموعة متسقة.
2. نثبت بان(A1, A2,...,~ Ai,..., An) مجموعة متسقة.

س1/ ناقش استقلال نظام بديهيات المستوى التالي.

ج/ 1) استقلال البديهية الاولى.

A1: كل نقطتين مختلفتين يوجد خط واحد فقط يحتويهما.

A1 فرع a: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاقل خط واحد يحتويهما.

A1 فرع b: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاكثر خط واحد يحتويهما.

A1 ~ فرع a: توجد نقطتين مختلفتين ولا يوجد خط يحتويهما.

ثم اثبات ان بديهيات المستوي التالفي متسقة أي ان A1, A2, A3, A4 مجموعة متسقة.

نثبت بان A1~ فرع a , A2, A3, A4 مجموعة متسقة.

النموذج

1	4
2	5
3	6

∴ A1 فرع a مستقلة.

A1~ فرع b: توجد نقطتين مختلفتين ويوجد اكثر من خط يحتويهما.

النموذج

1	4	1	1	1	2	2	2
2	5	4	5	6	4	5	6
3	6	3	3	3	5	6	4

∴ A1 فرع b مستقلة.

∴ A1 مستقلة.

2) البديهية الثانية:

A2: كل خط يحتوي على الاقل ثلاث نقاط مختلفة.

A2 ~: يوجد خط يحتوي على الاكثر ثلاث نقاط مختلفة.

نثبت اتساق المجموعة A1 , ~A2, A3, A4 .

1	3	1	1	2	2
2	4	3	4	3	4

∴ A2 مستقلة.

3) البديهية الثالثة:

A3: توجد على الاقل نقطة ويوجد على الاقل خط بحيث ان النقطة لا تقع على الخط.

A3~ : كل خط لا توجد نقطة لا تقع علية.

هذا النموذج يحقق اتساق A1 , A2, ~A3, A4

1
2
3

∴ A3 مستقلة.

4) البديهية الرابعة:
A4: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.
A4 فرع a: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد على الاقل يمر من P ويوازي l.
A4 فرع b: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد على الاكثر يمر من P ويوازي l.
A4 ~ فرع a: اذا كان l خط وP نقطة لا تقع علية فلا يوجد خط يمر من P ويوازي l.
أي انه لا يوجد حالة توازي (جميع الخطوط متقاطعة)
النموذج:

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

∴ A4 فرع a بديهية مستقلة.

A4~ فرع b: اذا كان l خط و P نقطة لاتقع علية فيوجد على الاقل خطان يمران من P وموازيان الى l.
النموذج:
∴ A4 فرع b مستقلة.
∴ A4 مستقلة.
∴ نظام بديهيات المستوي التالفي هو نظام مستقل.

س2/ ناقش استقلال نظام بديهيات المستوى الاسقاطي.

ج/ 1) استقلال البديهية الاولى.
A1: كل نقطتين مختلفتين يوجد خط واحد فقط يحتويهما.
A1 فرع a: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاقل خط واحد يحتويهما.
A1 فرع b: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاكثر خط واحد يحتويهما.
A1 ~ فرع a: توجد نقطتين مختلفتين ولايوجد خط يحتويهما.

تم اثبات ان بديهيات المستوي الاسقاطي متسقة أي ان A1, A2, A3, A4 مجموعة متسقة.
نثبت بان A1~ فرع A2, A3, A4, a مجموعة متسقة.

1	4
2	5
3	1

هذا النموذج يحقق الاتساق
∴ A1 فرع a مستقلة.
A1 ~ فرع b: توجد نقطتين مختلفتين ويحتويهما خطين على الاقل.

1	4	1
2	5	2
3	1	4

النموذج يحقق الاتساق
∴ A1 فرع b مستقلة.
∴ A1 مستقلة.

2) البديهية الثانية:
A2: كل خط يحتوي على ثلاث نقاط مختلفة على الاقل.
A2~: يوجد خط يحتوي على نقطتين مختلفتين على الاكثر.
نثبت اتساق المجموعة A2, A3, A4 ,~ A1 .

1	1	2
2	3	3

∴ A2 مستقلة.

3) البديهية الثالثة:

A3: توجد على الاقل نقطة ويوجد على الاقل خط بحيث ان النقطة لا تقع على الخط.

A3~: كل خط لا توجد نقطة لا تقع علية.

1
2
3

هذا النموذج يحقق اتساق A1 , A2, ~A3, A4

∴ A3 مستقلة.

4) البديهية الرابعة:

A4: كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة على الاقل.

A4 ~: يوجد خطين مختلفين لا يشتركان بنقطة.

النموذج:

1	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	7
2	5	4	5	6	4	5	6	4	5	6	8
3	6	7	8	9	9	7	8	8	9	7	9

∴ A4 مستقلة.

∴ نظام بديهيات المستوي الاسقاطي هو نظام مستقل.

ملاحظة: صفة الاستقلال صفة غير ضرورية في النظام البديهي لانه في حالة وجود بديهية غير مستقلة نقوم برفع هذه البديهية من البديهيات واضافتها الى المبرهنات.

س/ النظام البديهي التالي

A1: كل خطين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

A2: كل نقطة يمر بها خطين فقط.

A3: يوجد بالضبط ستة خطوط.

اجب عن مايلي :

1- كم عدد النقاط في المستوي
2- كم عدد النقاط في كل خط
3- هل ان النظام متسق ام لا؟

ثالثا: الاكتمال (التمام) Completeness

يقال عن نظام بديهي معين بانه نظام بديهي تام او كامل اذا لم يكن بالإمكان إضافة بديهية مستقلة الى النظام وفي حاله اضافة بديهية مستقلة الى النظام فان النظام البديهي يكون غير تام.

تعريف: " التقابل المتباين المحافظ على العلاقات one-to-one preserve relation"

ليكن M1 و M2 نموذجين لنظام بديهي معين يحتويان على نفس العدد من العناصر (النقاط, الخطوط), فاذا كان كل عنصر في النموذج M1 يقابل عنصر واحد فقط في النموذج M2 فيقال بان هنالك تقابل متباين بين النموذجين M1 وM2 ويطلق على هذا التطابق المتباين بالتقابل المتباين المحافظ على العلاقات .
اذا كانت كل عبارة صادقة حول عناصر M1 فانها تكون صادقة حول العناصر المقابلة لها في M2.

تعريف: النظام البديهي الفصلي Categorical System Axiomatic

يقال عن نظام بديهي بانه نظام بديهي فصلي اذا كان نموذجين في النظام متشاكلين تقابليا.

تعريف: التشاكل التقابلي Isomorphic

يقال عن نموذجين بنظام بديهي معين بانهما متشاكلين تقابليا (Isomorphic) اذا وجد على الاقل تقابل متباين واحد فقط محافظ على العلاقات بين النموذجين.

مبرهنة: اذا كان كل نموذحين لنظام بديهي متشاكلين تقابليا فان النظام البديهي هو نظام تام.

البرهان: سنبرهن بطريقة التناقض
نفرض ان النظام البديهي غير تام
∴ يمكن اضافة بديهية مستقلة ولتكن An الى النظام
و بما ان An بديهية مستقلة فان:

1. المجموعة A1, A2,..., An مجموعة متسقة.
2. المجموعة A1, A2, ..., ~An مجموعة متسقة.

لذلك فانه يوجد نموذجين للمجموعتين 1 و2 يحتويان على نفس العدد من العناصر
و بما ان كل نموذجين متشاكلين تقابليا
∴ يوجد تقابل متباين محافظ على العلاقات بين النموذجين
لذلك العبارتين An و An ~ امل ان تكونا صادقتين او كاذبتين وهذا لا يمكن
∴ النظام البديهي هو نظام تام.

طريقة الاختبار:

لكي نثبت بان النظام البديهي تام نثبت اولا بانه نظام فصلي (أي ان كل نموذجين في النظام متشاكلين تقابليا) وباستخدام المبرهنة السابقة يكون النظام البديهي تام.
مثال: اثبت تشاكل النموذجين M وN.

M

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	m10	m11	m12
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	I	H	H	G	I	I	H	G

N

n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	n10	n11	n12
1	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	7
2	5	4	5	6	4	5	6	4	5	6	8
3	6	9	7	8	7	8	9	8	9	7	9

ج/ هنالك عدة طرق لوضع تقابل متباين أحادي بين النموذجين M و N ولنأخذ التقابل التالي:

1. **A=1, B=2 C=3, D=4, E=5, F=6, G=7, H=8, I=9**

تقابل متباين غير محافظ على العلاقات.

$$M \begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline D \\ \hline G \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} \notin N$$

2. **افترض التقابل التالي:**

A=1, B=2, C=3, D=4, E=5, F=6, G=9, H=7, I=8

$m1 \rightarrow n1$, $m2 \rightarrow n2$, $m3 \rightarrow n12$, $m4 \rightarrow n3$, $m5 \rightarrow n7$, $m6 \rightarrow n11$, $m7 \rightarrow n4$, $m8 \rightarrow n8$, $m9 \rightarrow n9$, $m10 \rightarrow n5$, $m11 \rightarrow n6$, $m12 \rightarrow n10$.

∴لكل خط في النموذج M يوجد خط في النموذج N يحتوي على عناصر تقابل عناصر الخط m وبذلك يكون هذا التقابل المتباين محافظ على العلاقات وبذلك فان النموذجين Mو N متشاكلين تقابليا

3.

A=1, B=2, C=3, D=6, E=4, F=5, G=8, H=9, I=7

$m1 \rightarrow n1$, $m2 \rightarrow n2$, $m3 \rightarrow n12$, $m4 \rightarrow n5$, $m5 \rightarrow n6$, $m6 \rightarrow n10$, $m7 \rightarrow n3$, $m8 \rightarrow n7$, $m9 \rightarrow n11$, $m10 \rightarrow n4$, $m11 \rightarrow n8$, $m12 \rightarrow n9$.

∴لكل خط في النموذج M يوجد خط في النموذج N يحتوي على عناصر تقابل عناصر الخط m وبذلك يكون هذا التقابل المتباين محافظ على العلاقات وبذلك فان النموذجين Mو N متشاكلين تقابليا.

س/ بين أي من الانظمة التالية هي نظام فصلي او تام:

1. **نظام بديهيات المستوى الاسقاطي.**
2. **نظام بديهيات المستوى التالفي.**
3. **نظام بديهيات فانو.**
4. **نظام بديهيات يونك.**

ج/ بما ان نظام بديهيات المستوى الاسقاطي قد تحقق بنموذجين مختلفين في عدد العناصر (النقاط والخطوط) الاول يحتوي على 7 نقاط و7 خطوط والثاني يحتوي على 13 نقطة و 13 خط فهذا يعني انه لا يمكن ايجاد تشاكل تقابلي (التقابل المتباين) بين كل نموذجين في النظام وبذلك فان نظام بديهيات المستوى الاسقاطي غير فصلي.

اما بالنسبة الى نظام بديهيات المستوى التالفي لانه تحقق بنموذجين مختلفين في عدد العناصر الاول يحتوي على 9 نقاط و 12 خط والثاني 16 نقطة و 20 خط لذلك فان نظام بديهيات المستوي التالفي هو نظام غير فصلي.

اما نظام بديهيات فانو فهو نظام فصـــلي لان كل نموذج فية يحتوي على 7 نقاط و7 خطوط وبالتالي فان كل نموذجين فيه متشاكلين تقابليا.
وكذلك نظام بديهيات يونك هو نظام فصـــلي لان كل نموذج فيه يحتوي على 9 نقاط و12 خط وبالتالي فان لكل نموذجين فيه يمكن ايجاد تقابل متباين محافظ على العلاقات.
∴ نظام بديهيات المســتوى الاســقاطي والمســتوى التالفي نظامين غير تامين ونظام بديهيات فانو ونظام بديهيات يونك نظامين تامين.
س/ ناقش تشاكل النموذجين التاليين:

M

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	m10	m11	m12
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5
2	4	6	8	4	5	7	4	5	6	7	6
3	5	7	9	6	8	9	9	7	8	8	9

N

n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	n10	n11	n12
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	6	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	7	9

نفرض التقابل التالي:

1=1, 2=2, 3=4, 4=8, 5=5, 6=7, 7=9, 8=6, 9=3

m1→n1, m2→n3, m3→n4, m4→n2, m5→n7, m6→n6, m7→n5, m8→n8, m9→n10, m10→n11, m11→n12, m12→n9.

∴ النموذجين M و N متشاكلين تقابليا.

الهندســـة الاقليدية

يعتبر كتاب الأصـــول لإقليدس (Elements) اول كتاب في الرياضـــيات مبني على نظام البديهيات (Axiomatic System) ظهر قبل اكثر من الفي سنة. لقد بنى اقليدس اصولة على التعاريف والبديهيات في براهينه لان أي اثبات منطقي لابد وان يرتكز على نقطة ابتداء مفروضــة بغير مناقشــة. قدم اقليدس في كتابة هذا 23 تعريف و10 بديهيات عامة و48 مبرهنة وكما يلي:

التعاريف: Definitions

لقد بدا اقليدس بكتابة ثلاثة وعشرون تعريف والتي هي:-

1. **النقطة: هي التي ليس لها ابعاد.**
2. **المستقيم: هو طول بدون عرض.**
3. **نهايات المستقيم: هي نقاط.**
4. **الخط المستقيم: هو الخط الذي يقع كليا على نقاطة.**
5. **السطح: هو الذي له طول وعرض فقط.**
6. **نهايات السطوح: هي خطوط.**
7. **السطح المستوي: هو ذلك السطح الذي يقع كليا على مستقيماته.**
8. **الزاوية المستوية: هي ميلان احد مستقيمين متلاقين عن الاخر في مستوي ولا يقعان على مستقيم واحد.**
9. **واذا وقع المستقيمان على مستقيم واحد فالزاوية تسمى زاوية مستقيمة.**
10. **اذا رســم مســتقيم يصــنع مع مســتقيم اخر زاويتين متجاورتين متســاويتين فان كلا من الزاويتين المتساويتين قائمة والمستقيم المرسوم يكون عموديا على الاخر.**
11. **الزاوية المنفرجة هي الزاوية التي تكون اكبر من قائمة.**
12. **الزاوية الحادة هي الزاوية التي تكون اصغر من قائمة.**
13. **حدود الشيء هي اطرافه.**
14. **الشكل هو كل ما يكون ضمن الحدود.**
15. **الدائرة: هي شكل مستوي محاط بخط بحيث ان كل المستقيمات الواقعة على الخط من نقطة واحدة مشتركة داخل الشكل, تكون متساوية فيما بينها.**
16. **والنقطة المعينة في التعريف (15) تسمى مركز الدائرة.**
17. **قطر الدائرة: هو أي مســتقيم مرســوم من المركز ومنتهي في الاتجاهين بمحيط الدائرة, وهذا الخط المستقيم ينصف الدائرة.**
18. **نصــف الدائرة: هو الشــكل المحاط بالقطر والمحيط المقطوع به, ومركز نصــف الدائرة هو مركز الدائرة نفسه.**
19. **الاشكال المستوية: هي الاشكال المحاطة بخطوط مستقيمة والشكل الثلاثي محاط بثلاثة مستقيمات والشكل الرباعي باربعة مستقيمات وكثير الاضلاع محاط باكثر من اربعة مستقيمات.**
20. **من الاشكال الثلاثية المثلث المتساوي الاضلاع وهو الذي تكون اضلاعة الثلاثة متساوية, والمثلث المتساوي الساقين فيه ضلعين فقط متساويين, والمثلث المختلف الاضلاع هو الذي تكون اضلاعة مختلفة.**
21. **واضافة الى ذلك, من الاشكال الثلاثية, المثلث القائم الزاوية الذي فيه زاوية قائمة واحدة, والمثلث المنفرج الزاوية الذي فيه زاوية منفرجة واحدة, والمثلث الحاد الزوايا هو الذي تكون زواياة حادة.**

22. من الاشكال الرباعية المربع الذي تكون اضلاعة متساوية وزواياه قوائم, والمستطيل الذي زواياه قوائم واضلاعة غير متساوية والمعين الذي اضلاعة متساوية وزواياه ليست قوائم, والمتوازي الاضلاع الذي فية زواياه المتقابلة متساوية واضلاعة المتقابلة متساوية, ولكن ليس متساوي الاضلاع و لا قائم الزاويا, والاشكال الرباعية الاخرى من غير هذه تسمى منحرفة.
23. الخطوط المستقيمة المتوازية: هي الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوي واحد والتي لا تلتقي مهما امتدت في أي الاتجاهين.

الفرضيات: The Postulates

بعد ان وضع اقليدس تلك التعاريف بدا بكتابة عشرة فرضيات وقسمها الى مجموعتين سمى المجموعة الاولى بالمفاهيم العامة والمجموعة الثانية بالبديهيات.

اولا:- المفاهيم العامة: The Common notions

1. الاشياء المتساوية للشيء الواحد متساوية فيما بينها.
2. اذا اضيفت كميات متساوية الى اخرى متساوية تكون النتائج متساوية.
3. اذا طرحت مقادير متساوية من اخرى متساوية تكون البواقي متساوية.
4. الاشياء المتطابقة متساوية فيما بينها.
5. الكل اكبر من الجزء.

ثانيا:- البديهيات: Axioms

1. من الممكن رسم خط مستقيم من اي نقطة الى اي نقطة.
2. يمكن مد قطعة مستقيم من جهتيها الى غير حد.
3. يمكن رسم دائرة اذا علم مركزها ونصف قطرها.
4. جميع الزوايا القوائم متساوية.
5. اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهه واحدة من القاطع اقل من قائمتين, فان المستقيمان, اذا مدا بغير حد, يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجموع الزاويتين اقل من قائمتين.

تعتبر البديهية الخامسة لاقليدس من البديهيات المهمة والتي كانت نقطة البداية في دراسة الهندسة اللاقليدية حيث كانت هذه البديهية مثار جدل علماء الرياضيات والسبب في ذلك هو الشك في كون هذه البديهية مبرهنة لذلك حاول كثير من العلماء برهنة هذه البديهية بالاعتماد على البديهيات الأربعة الا ان هذه المحاولات كانت فاشلة لان البراهين كانت تعتمد على عبارات تكافئ البديهية الخامسة. ان السبب في الاعتقاد في كون البديهية الخامسة مبرهنة هو:

1- طول البديهية الخامسة مقارنة بالبديهيات الاربعة.
2- لم يستخدم اقليدس البديهية الخامسة في برهان اول 28 مبرهنة واستخدامها في برهان مبرهنة 29 والتي بعدها.

المبرهنات: Theorem

بعد ان قدم اقليدس التعاريف والبديهيات بدا في اشتقاق نظرياتة الثمان والاربعون واحدة بعد الاخرى, ولسبب ما اراد اقليدس ان يعرف الى أي حد يستطيع ان يسير بالمفاهيم والبديهيات الاربعة من دون ان يستخدم البديهية الخامسة (لا يمكن معرفة هذا السبب اذ قد يكون نفسيا او منطقيا او فلسفيا). لقد استطاع اقليدس اشتقاق الثماني وعشرون نظرية الاولى فقط بدون استخدام البديهية الخامسة. (حيث استخدم اقليدس البديهية الخامسة لاول مرة في برهان نظرية (29)). والنظريات الثمان والاربعون والتي بعضها عمليات (مرتبة كما ذكرت في كتاب الاصول) هي:-

1. كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم محدود الطول.
2. كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.

3. من اكبر مستقيمين معلومين كيفية قطع جزء يساوي اصغر المستقيمين.
4. اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر. يتساوى المثلثان وتساوي الزوايا الباقية والضلع من احدهما نظائرها من الاخر.
5. في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان ايضا.
6. اذا تساوت زاويتان في مثلث فالضلعان المقابلان لهما متساويان.
7. اذا رسم مستقيمان من طرفي مستقيم معلوم وتلاقيا في نقطة هناك لا يمكن رسم مستقيمين اخرين يساويان المستقيمين على التوالي, وفي طرفي المستقيم المعلوم نفسه ومتلاقيان في نقطة اخرى في الجهة نفسها من المستقيم المعلم.
8. اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر على التوالي وتساوت قاعديهما تساوت زواياهما على التناظر.
9. كيفية تنصيف زاوية مستوية.
10. كيفية تنصيف مستقيم معلوم محدود الطول.
11. كيفية اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه.
12. كيفية رسم مستقيم عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنة.
13. اذا لاقى مستقيم مستقيما معلوم, فانه يصنع اما زاويتين قائمتين او زاويتين مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين.
14. اذا رسم من نقطة معلومة على مستقيم معلوم مستقيمين وعلى طرفية المختلفين وكان مجموع الزاويتين المتجاورتين يساوي زاويتين قائمتين فالمستقيمان يقعان على مستقيم واحد.
15. اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان بالراس متساويتان.
16. اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من كل من الزاويتين الداخليتين المقابلتين لهما.
17. مجموع زاويتين في مثلث كيفما اتخذت اقل من زاويتين قائمتين.
18. في أي مثلث يكون اكبر الاضلاع مقابلا لاكبر الزوايا.
19. في أي مثلث تكون الزاوية الكبرى مقابلة لاكبر الاضلاع.
20. مجموع أي ضلعين في مثلث اكبر من ضلعه الثالث.
21. اذا رسم من طرفي قاعدة مثلث, مستقيمان وتلاقيا في نقطة داخل المثلث فالمستقيمان اصغر من ضلعي المثلث, ويحصران زاوية اكبر من الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث.
22. كيفية رسم مثلث اضلاعه تساوي ثلاثة مستقيمات معلومة. ومن الضروري ان يكون مجموع أي زوج من المستقيمات اكبر من المستقيم الثالث.
23. من نقطة على مستقيم معلوم, كيفية رسم زاوية مستوية تساوي زاوية معلومة.
24. اذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في مثلث اخر على التوالي وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الاول اكبر من نظيرتها في المثلث الثاني فان الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.
25. اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر على التوالي وكانت الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني فالزاوي المحصورة بين الضلعين المتساويين في المثلث الاول اكبر من الزاوي المحصورة بين الضلعين المتساويين في المثلث الثاني.
26. اذا ساوت زاويتان وضلع من مثلث زاويتين وضلع مناظر من مثلث اخر على التوالي فالضلعان الاخران والزاوية الثالثة في المثلث الاول تساوي الضلعين الاخرين والزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

27. اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين يكون المستقيمان متوازيين.
28. اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية والمقابلة لها في نفس الجهة من القاطع, او كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين, يكون المستقيمان متوازيين.
29. اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وفي نفس الجهة من القاطع وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين.
30. المستقيمان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان.
31. من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم يوازي مستقيما معلوما.
32. اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها, ومجموع الزوايا الثلاث للمثلث يساوي زاويتين قائمتين.
33. المستقيمان الواصلان بين نهايتي مستقيمين متساويين ومتوازيين يكونان متساويين ومتوازيين.
34. تتساوى الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة في متوازي الاضلاع والقطر ينصف مساحتة.
35. متوازيات الاضلاع المحصورة بين مستقيمين متوازيين والمشتركة بالقاعدة بيساوى بالمساحة.
36. متوازيات الاضلاع التي تتساوى بالقاعدة والمحصورة بين المتوازيين نفسهما تتساوى مساحتهما.
37. المثلثات المرسومة على القاعدة نفسها والمحصورة بين المتوازيين نفسهما تتساوى مساحتهما.
38. المثلثات المرسومة على قواعد متساوية والمحصورة بين المتوازيين نفسهما تتساوى مساحتهما.
39. المثلثات المتساوية بالمساحة. والمرسومة على القاعدة نفسها وفي الجهة نفسها من القاعدة تنحصر بين مستقيمات متوازية.
40. المثلثات المتساوية المساحة. والمرسومة على قواعد متساوية الواقعة في مستقيم واحد وفي الجهة نفسها من المستقيم تنحصر بين مستقيمات متوازية.
41. مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الاضلاع المشترك معه بالقاعدة والمحصورة معه بين المتوازيين نفسهما.
42. كيفية رسم متوازي الاضلاع داخل زاوية مساحته تساوي مساحة مثلث معلوم.
43. في أي متوازي اضلاع تكون متوازيات الاضلاع المرسومة حول قطره متساوية بالمساحة.
44. كيفية رسم متوازي الاضلاع داخل زاوية معلومة واحد اضلاعة يساوي مستقيما معلوما ومساحته تساوي مساحة مثلث معلوم.
45. كيفية رسم متوازي الأضلاع داخل زاوية معلومة مساحتها تساوي مساحة شكل مستوي.
46. كيفية رسم مربع على مستقيم معلوم.
47. في المثلث القائم الزاوية, مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين القائمين.
48. اذا كانت مساحة المربع المنشأ على ضلع المثلث, تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين, فالزاوية المحصورة بين الضلعين الآخرين قائمة.

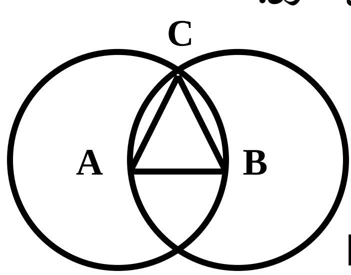
بعض مواطن الضعف في نظام إقليدس:-

1. خلو النظام البديهي لاقليدس من الكلمات الاولية حيث ان اقليدس يعرف النقطة بانها لا بعد لها والمستقيم هو طول بدون عرض أي انه يعرف الكلمات بواسطة كلمات اخرى اصعب من الكلمة نفسها لذلك الانتقاد الذي وجهة للهندسة الاقليدية هو خلوها من الكلمات الاولية.

2. استخدم اقليدس فرضيات لم يشير اليها في نظامه لذلك سميت ببديهيات ضمنية وهي " بديهية البين(نقطة تقع بين نقطتين), بديهية باخ, بديهية الاستمرارية, وحدانية المستقيم, لانهائية المستقيم, بديهية الترتيب الخطي".
3. استعمل اقليدس كلمة يساوي للاشارة الى التطابق فكان يقول(تساوي مثلثين) بينما الصحيح تطابق مثلثين.
4. اعتمد على الرسم لبرهان مبرهناتة وليس مجرد توضيح للبرهان واستنتج من الرسم فرضيات لم يذكرها في نظامه.
5. ان نظام الهندسة عند اقليدس هو نظام غير كامل حيث يمكن اضافة بديهيات مستقلة الى النظام وبقاء النظام متناسق ونوضح ذلك بالبديهية التالية: "الخط الواصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها يقطع الدائرة".

بعض المبرهنات مع البرهان كما وضعها اقليدس:

مبرهنة 1:- كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنته في الطول.



المفروض: AB مستقيم معلوم ومنته في الطول.

م. ث. : رسم مثلث متساوي الاضلاع على المستقيم AB.

البرهان: نرسم دائرة مركزها A ونصف قطرها AB. [A3]

نرسم دائرة مركزها B ونصف قطرها BA [A3]

∴ الدائرتان متقاطعتان في النقطة C

نرسم مستقيم بين النقطتين A وC ونرسم مستقيم بين النقطتين B وC [A1]

∵ AC=AB أنصاف أقطار دائرة واحدة (تعريف الدائرة)

BC=AB أنصاف أقطار دائرة واحدة (تعريف الدائرة)

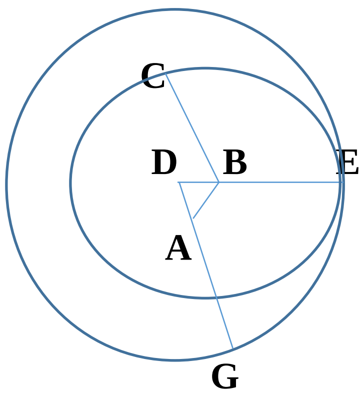
∴ AB=AC=BC (مفاهيم عامة رقم 1)

∴المثلث ABC متساوي الاضلاع

الانتقاد:

1. افترض اقليدس وجود نقطة تقاطع للدائرتين ولم يبرهن ذلك وكذلك لم يبرهن ان نقطة تقاطع الدائرتين لا تقع على المستقيم AB.
2. استخدم مفهوم وحدانية المستقيم المرسوم بين نقطتين دون ان يشير إليه في البديهيات.
3. استخدم فرضية ضمنية وهي ان كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تشكل مثلث وهذه الفرضية لا يمكن اثباتها او نفيها باستخدام البديهيات.

مبرهنة 2:- كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.



المفروض: BC مستقيم معلوم, A نقطة معلومة.

م. ث.: رسم مستقيم طوله يساوي BC ويمر من نقطة A.

البرهان: نرسم مستقيم بين النقطتين A و B [A1]

∴ يمكن رسم مثلث متساوي الاضلاع DAB (مبرهنة 1)

نرسم دائرة مركزها B ونصف قطرها BC [A3]

نمد المستقيم DB فيقطع الدائرة في نقطة E [A2]

نرسم دائرة مركزها D ونصف قطرها DE [A3]

نمد المستقيم DA فيقطع الدائرة الاولى في نقطة F والدائرة الثانية في نقطة G [A2]

∵ DE=DG (أنصاف أقطار دائرة واحدة) تعريف الدائرة

وان DB=DA (ضلعين في مثلث متساوي الاضلاع)

∴ AG=BE (مفاهيم عامة 3)

∵ BC=BE (أنصاف أقطار دائرة واحدة) تعريف الدائرة

∴ BC=AG (مفاهيم عامة 1)

المستقيم AG يمر من نقطة A وطوله يساوي طول المستقيم BC.

الانتقاد:-

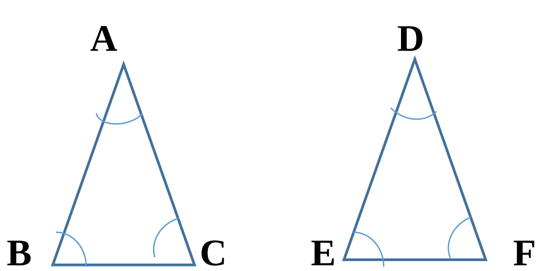
أستخدم اقليدس الفرضية (المستقيم الواصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها يقطع الدائرة) وهذه الفرضية لا يمكن برهانها بالاعتماد على بديهيات اقليدس ولكن يمكن استنتاجها من الرسم.

مبرهنة 4:- اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر على التناظر فانه يتساوى المثلثان وتتساوى الزوايا المتناظره والضلع من احدهما مع نظيره من الاخر.

المفروض: ABC مثلث ,DEF مثلث اخر فيهما DE=AB ,DF=AC ,≺A=≺D.

م. ث.: المثلث ABC=المثلث DEF ,BC=EF ,≺B=≺E ,≺C=≺F.

البرهان: نضع المثلث ABC على المثلث DEF بحيث ان الراس A يقع على الراس D والضلع AB على الضلع DE



∵ AB=DE (بالفرض)

∴ النقطة E تنطبق على النقطة B

∵ ≺A=≺D (بالفرض)

∴ الضلع AC يقع على الضلع DF

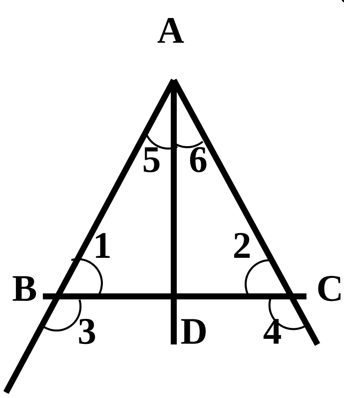
∵ DF=AC (بالفرض)

∴ النقطة F تنطبق على النقطة C

∴ النقطة E تنطبق على النقطة B و النقطة F تنطبق على النقطة C
∴ الضلع BC ينطبق على الضلع EF
$\therefore BC=EF\ ,\ \angle B=\angle E\ ,\ \angle C=\angle F$
∴ المثلث ABC=المثلث DEF

الانتقاد:-
أستخدم اقليدس في برهانه طريقة نقل الاشكال كطريقة للبرهان وهذا غير صحيح اذ لا يمكن دائما بقاء الاشكال على حالها دون ان تتغير عند نقلها.

مبرهنة 5:- في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان أيضا.
المفروض: ABC مثلث فيه AB=AC
م. ث.: $\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$
البرهان: ننصف الزاوية A بحيث يقطع المستقيم المنصف الضلع BC في نقطة D
في المثلثين ABD, ADC فيهما:
AC=AB (بالفرض)
الضلع AD مشترك
$\angle 6=\angle 5$ (بالتنصيف), ∴ المثلثABD =المثلثADC
و $\angle 2=\angle 1$ (مبرهنة 4)
$\angle 4+\angle 2=\angle 3+\angle 1$ (زاوية مستقيمة)
∴ $\angle 4=\angle 3$ (مفاهيم عامة 3)



الانتقاد:-
1. فرض ان منصف الزاوية يكون وحيدا من دون ان يذكر ذلك في نظامه أي انها فرضية ضمنية.
2. فرض ان منصف الزاوية من مثلث يقطع الضلع المقابل له وهي ليست ضمن فرضياته او براهينه.

مبرهنة 6:- اذا تساوت زاويتان في مثلث فالضلعان المقابلان لهما متساويان.

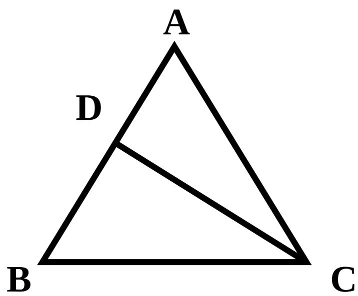
المفروض: ABC مثلث فيه $\angle B = \angle C$

م. ث.: AC=AB

البرهان:

اذا لم يكن AC=AB فانه اما يكون اكبر منه او اصغر منه

وليكن AB اكبر من AC



∴ توجد نقطة مثل D بحيث ان AC=DB (مبرهنة 3)

نصل بين النقطتين D و C [A1]

في المثلثين ABC و BDC

BC ضلع مشترك

AC=BD (بالبرهان)

$\angle B = \angle C$ بالفرض

∴ المثلث ABC=المثلث BDC (مبرهنة 4)

وهذا لا يمكن لان المثلث ABC اكبر من المثلث BDC وبنفس الطريقة نثبت التناقض AB اصغر من AC

∴ AC=AB

الانتقاد:

1. اعتمد على الرسم في ملاحظة كون المثلث ABC اكبر من المثلث BDC ولم يعتمد على احد فرضياته او مبرهناته.
2. اعتمد اقليدس على فكرة التقسيم الثلاثي لاطوال الاضلاع أي اما AB=AC او AB اكبر من AC او AB اصغر من AC وهذه الفكرة ليست ضمن المفاهيم الاولية او البديهيات او المبرهنات.

مبرهنة 9: كيفية تنصيف زاوية مستوية.

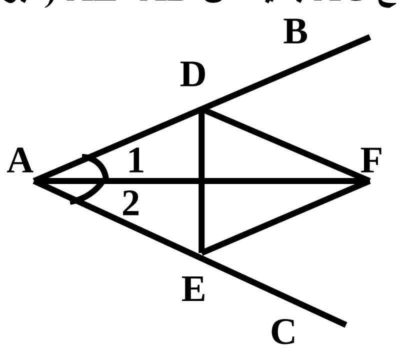
المفروض: BAC زاوية

م. ث.: تنصيف زاوية BAC

البرهان:

لتكن D نقطة على الضلع AB , توجد نقطة مثل E على الضلع AC بحيث ان AE=AD (مبرهنة 3)

يوجد خط بين النقطتين E و D [A1]



∴ يوجد مثلث متساوي الاضلاع DEF (مبرهنة 1)

نصل بين النقطتين F وA [A1]

في المثلثين ADF و AEF

AE=AD بالبرهان

EF=DF (ضلعين في مثلث متساوي الاضلاع)

AF ضلع مشترك

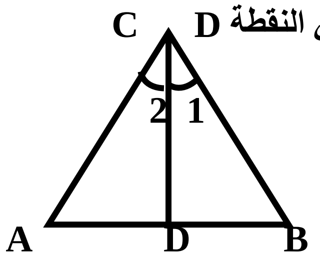
∴ المثلث ADF = المثلث AEF (مبرهنة 8)

∴ $\angle 2 = \angle 1$

الانتقاد:-

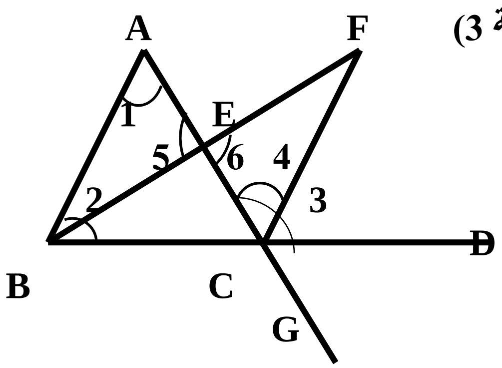
اعتمد اقليدس على الرسم بتحديد كون المستقيم AF يقع داخل زاوية A و لم يعطي برهان منطقي لهذه الحالة.

<u>مبرهنة 10:</u> كيفية تنصيف قطعة مستقيم (مستقيم طوله منتهي).
المفروض: AB قطعة مستقيم
م. ث.: تنصيف قطعة المستقيم AB
البرهان: يوجد مثلث متساوي الأضلاع هوالمثلث ABC (مبرهنة 1)
ننصف الزاوية C (مبرهنة 9) بحيث يقطع هذا المنصف الضلع AB في النقطة D
في المثلثين ADC و BDC فيهما
BC=AC (ضلعين في مثلث متساوي الأضلاع) ,
DC ضلع مشترك,
$\angle 2 = \angle 1$ بالتنصيف
∴ المثلث ADC = المثلث BDC (مبرهنة 4)
و AD=BD



<u>الانتقاد:</u>
افترض اقليدس ان المنصف لزاوية C يقطع الضلع AB في نقطة D وهذا لا يمكن برهانه لا من خلال الرسم وكذلك افترض ان النقطة D تقع بين النقطتين A و B أي انه استخدم بديهية البين في نظامه ولم يشر اليها.

<u>مبرهنة 16:</u> اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.
المفروض: ABC مثلث وقد مد الضلع BC الى النقطة D
م. ث.: $\angle 3 > \angle 1$ و $\angle 3 > \angle 2$
البرهان: لتكن E منتصف الضلع AC (مبرهنة 10)
نصل بين النقطتين E و B [A1]
نمد قطعة المستقيم BE الى F [A2] بحيث BE=EF (مبرهنة 3)
نصل بين النقطتين F و C [A1]
في المثلثين CEF و EAB فيهما:
AE=EC (بالتنصيف), BE=EF (بالبرهان)
$\angle 5 = \angle 6$ (زاويتان راسيتان) (مبرهنة 15)
∴ المثلث CEF= المثلث EAB (مبرهنة 4)
$\angle 4 = \angle 1$ (مبرهنة 4)
و لكن $\angle 3 > \angle 4$
$\angle 3 > \angle 1$ ∴
وبنفس الطريقة نمد المستقيم AC الى G [A2]
و أذا نصفنا BC و $\angle BCG = \angle ACD$ (مبرهنة 15)
∴ من الممكن برهان ان $\angle 3 > \angle 2$



<u>الانتقاد:</u>
1. **لم يبرهن إن النقطة F تقع في داخل $\angle ACD$ ومنه يستنتج بان $\angle ACF$ هي اصغر من $\angle ACD$.**
2. **لقد ذكر إقليدس في البديهية الثانية على انه يمكن مد قطعة مستقيم من جهتيها الى غير حد. ان هذا لا يؤدي إلى أن طول المستقيم غير منته. لقد أهمل إقليدس هذه النقطة إلى عام 1854م حينما ميز**

ريمان بين المسـتقيم الذي يكون محددا وبين المسـتقيم الذي يكون طولـه منتـه. في حين أن إقليدس كان يستخدم هذه المصطلحات بصورة متساوية مثل غير محدود هو مفهوم امتداد.

تقويم هندسة إقليدس

أسس الهندسة

قدم عالم الرياضيات الألماني دافيد هلبرت نظاما بديهيا متكاملا الذي منه نستنتج الهندسة الاقليدية. لقد صحح الاخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس. نبدا نظامنا هذا بكلمات اولية تقنية تدعى نقاط التي يرمز لها بالرمز .... A, B, C, والمستقيمات يرمز لها بالرمز .... l, m, n,

يتالف هذا النظام من مجموعتين من البديهيات وهي :

- بديهيات الوقوع والوجود
- بديهيات الترتيب

1- بديهيات الوقوع والوجود:

A1 : لكل نقطتين مختلفتين معلومتين, يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.

A2: كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل.

A3: لكل مستقيم معلوم, توجد في الاقل نقطة واحدة لاتنتمي اليه.

A4: يوجد في الاقل مستقيم واحد.

تعريف: تكون المجموعتان متساويتان اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العدد من العناصر.

مبرهنة 1: توجد في الاقل ثلاث نقاط مختلفة في النظام.

المفروض: نظام اقليدس (المعدل)

م. ث. : يوجد على الاقل ثلاث نقاط مختلفة.

البرهان: يوجد مستقيم مثل l (A4)

∴ المستقيم l يحتوي على نقطتين مثل A و B (A2)

توجد نقطة مثل C لا تنتمي الى l (A3)

∴ يوجد على الاقل ثلاث نقاط مختلفة A, B, C.

مبرهنة 2: أي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

المفروض: l و m مستقيمين مختلفين.

م. ث.: l و m يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان: نفرض ان l و m يشتركان في نقطتين مثل A, B

ولكن هذا يناقض (A1)

∴ l و m يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

تمارين:

1. برهن على ان لكل نقطة يوجد في الاقل مستقيمان يمران بها.
2. برهن على انه يوجد في الاقل مستقيم واحد لا يمو من نقطة معلومة.

2- بديهيات الترتيب: Axioms of Order

قاعدة لغوية: "بين" هي كلمة اولية تقنية. ويرمز للعبارة "B تقع بين A و C" بالرمز A-B-C.

مجموعة البديهيات:

A5: A-B-C اذا وفقط اذا C-B-A.
A6: اذا كانت A-B-C فان النقاط A, B, C مختلفة و تقع على مستقيم واحد.
A7: اذا كان A, B, C أي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد, فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

$$A-B-C \vee A-C-B \vee C-A-B$$

<u>رمز:</u> الرمز A-B-C-D هو مختصر الى A-B-C, A-B-D, A-C-D, B-C-D وبنفس الطريقة بالنسبة لاكثر من اربع نقاط.
A8: اذا كانت A, B, C, D اربع نقاط مختلفة وعلى مســتقيم واحد وان A-B-C فان واحد فقط مما يلي يتحقق:

$$A-B-C-D \vee A-B-D-C \vee A-D-B-C \vee D-A-B-C$$

A9: اذا كانت A و B أي نقطتين فان:
أ- توجد نقطة مثل C بحيث ان A-B-C.
ب- توجد نقطة مثل D بحيث ان A-D-B.
ت- توجد نقطة مثل E بحيث ان E-A-B.

<u>مبرهنة 3:</u>

1) **اذا كان A-B-C, A-C-D فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.**
2) **اذا كان A-B-D, B-C-D فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.**
3) **اذا كان A-B-C, B-C-D فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.**

البرهان:
1) ∵ A-B-C , فان النقاط A, B, C مختلفة وعلى مستقيم واحد (A6)
وكذلك A-C-D, فان النقاط A, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد(A6)
اذا كان B=D
و بما ان A-C-D
∴ A-C-B
و لكن A-B-C
و هذا يناقض (A7)
∴ النقاط A, B, C, D نقاط مختلفة.
∵ A و C نقطتين مختلفتين.
∴ يوجد مستقيم واحد فقط يحتوي النقطتين A و C (A1)
∴ B و D تقعان على المستقيم AC
∴ A, B, C, D تقع على مستقيم واحد.

<u>مبرهنة 4:</u>

1) **اذا كان A-B-C, A-C-D فان A-B-C-D.**
2) **اذا كان A-B-D, B-C-D فان A-B-C-D .**
3) **اذا كان A-B-C, B-C-D فان A-B-C-D.**

البرهان:
1) ∵ A-B-C, A-C-D
∴ النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد(مبرهنة3) .
وA-B-C

∴ من (A8) تتحقق واحدة فقطممايلي

$A-B-C-D \vee A-B-D-C \vee A-D-B-C \vee D-A-B-C$

∵ A-C-D تتحقق فان من بديهية 7 لايتحقق كل من

A-D-C و D-A-C

∴ لايتحقق كل من A-B-D-C ∧ A-D-B-C ∧ D-A-B-C

∴ يتحقق فقط A-B-C-D

مبرهنة 5:

1) اذا كان A-B-D وA-C-D و$B \neq C$ فان اما A-B-C او A-C-B

2)اذا كان A-B-C وA-B-D و $C \neq D$ فان اما B-C-D اوB-D-C

3) اذا كان A-B-C وA-B-D و$C \neq D$ فان اما A-C-D اوA-D-C

البرهان/1)

A-B-D فان النقاط A, B, D مختلفة وعلى مستقيم واحد (A6)

A-C-D فان النقاط A, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد (A6)

$\because$ D, A نقطتين مختلفتين

$\therefore$ يوجد مستقيم واحد فقط يحتوي D, A (A1)

$\because$ $B \neq C$

$\therefore$ النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد

$\therefore$ النقاط A, B, C مختلفة وعلى مستقيم واحد

$\therefore$ من A7 تتحقق واحدة فقط ممايلي

$A-B-C \vee A-C-B \vee C-A-B$

$\because$ A-B-D وA-C-D تتحقق

$\therefore$ احتمال C-A-B غير متحقق

$\therefore$ يتحقق اما A-B-C اوA-C-B

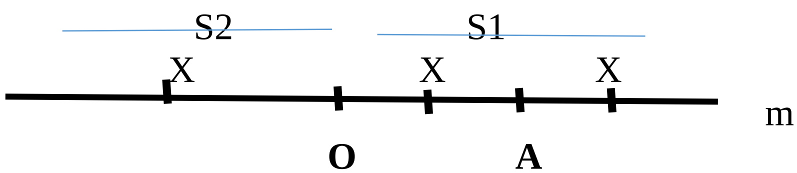
تعريف / اذا كانت المجموعة S هي اتحاد مجموعتين او اكثر جزئيتين غير خاليتين A1 وA2 بحيث ان كل عنصر في S هو عنصر في واحدة وواحدة فقط من المجموعات الجزئية فانه يقال بان A1وA2 تجزئة للمجموعة S .

كمثال المجموعتان {1,2},{3,4,5} تكونان تجزئه للمجموعة {1,2,3,4,5}

تعريف/ لتكن O اي نقطة على المســـتقيم m و A نقطة اخرى على m . لتكن S1 مجموعة كل النقاط X على mمن ضمنها A بحيث ان الترتيبO-X-A او O-A-X ولتكن S2 مجموعة كل النقاط X على m X-O-A فان S1 وS2 تدعيان جهتي Oعلى m وتدعيان ايضا نصفي المستقيم m بالنسبة الى O اي ان

$S1=\{X \in m / O-X-A \vee O-A-X \vee X=A\}$

$S2=\{ X \in m/ X-O-A \}$



مبرهنة 6/ جهتا النقطة O على المستقيم m لاتحتويان على O

البرهان /

$O \in S1$

بماان $O \neq A$ اذن O-O-A او O-A-O ولكن هذا يناقض (A6)

$O \in S2$

$\therefore$ **O-O-A وهذا يناقض (A6)**

اذن $O\notin S1$,$O\notin S2$

تعريف / لتكن A,B نقطتين مختلفتين, مجموعة كل النقاط X بحيث ان A-X-B تدعى قطعة ويرمز لها بالرمز A-B

مبرهنة 10/ النقطتان A,B لاتنتميان الى القطعة A-B

البرهان/

اذا كان $A,B \in A\text{-}B$

اذن A-A-B,A-B-B وهذا يناقض (A6)

اذن $A,B \notin A\text{-}B$

مبرهنة 11/القطعة A-B هي مجموعة غير خالية

البرهان/

من A9 توجد نقطة مثل C بحيث ان A-C-B

$C\in A\text{-}B$

اذن القطعة A-B هي مجموعة غير خالية

مبرهنة 12/ $A\text{-}B = B\text{-}A$

البرهان/

يجب ان نبرهن بان القطعة A-B هي مجموعة جزئية من القطعة B-A وبالعكس

ولكي نبرهن بان القطعة A-B هي مجموعة جزئية من القطعة B-A, يجب ان نبرهن بان لكل X تنتمي الى القطعة A-B فان X تنتمي الى القطعة B-A

$X\in A\text{-}B$ هذا يؤدي الى $A\text{-}X\text{-}B \Leftarrow B\text{-}X\text{-}A$(A5)

اذن $X \in$ **B-A**

$\therefore$ **$A\text{-}B\subseteq B\text{-}A$**

وبنفس الطريقة نبرهن بان القطعةB-A هي مجموعة جزئية من القطعةA-B

$\therefore$ **$B\text{-}A \subseteq A\text{-}B$**

$\therefore$ **$B\text{-}A = A\text{-}B$**

مبرهنة 13/ القطعة A-B هي مجموعة جزئية من المستقيم AB

البرهان/ ولكي نبرهن بان القطعة A-B هي مجموعة جزئية من المستقيم AB

يجب ان نبرهن بان لكل X تنتمي الى القطعة A-B فان X تقع على المستقيم AB

$\because$ **$X\in A\text{-}B \Leftarrow A\text{-}X\text{-}B$**

$\therefore$ **من بديهية A6 فان A,X,B نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد**

$\because$ **A, B نقطتين مختلفتين (تعريف القطعة)**

$\therefore$**يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما [A1]**

لذا فان X تقع على المستقيم AB

$\therefore$ **القطعه A-B مجموعة جزئية من المستقيم AB**

مبرهنة 14/ لتكن A,B نقطتين مختلفتين فان

$\{A, B\}=\{C, D\} \Leftrightarrow A\text{-}B=C\text{-}D$

البرهان/ الاتجاه الاول/

نفرض $\{A,B\}=\{C,D\}$

فانه اما $A=C,B=D$ او$A=D,B=C$

ففي اي حالة يكون من تعريف القطعه $A\text{-}B=C\text{-}D$

الاتجاه الثاني/نفرض $A\text{-}B=C\text{-}D$ و$\{A,B\}\neq\{C,D\}$

$\therefore$يوجد عنصر في احدى المجموعتين لاينتمي الى الاخرى وليكن C اي ان $C\neq B, C\neq A$

$\because A\neq B \Leftarrow A, B, C$ نقاط مختلفة

من(مبرهنة 13)القطعه A-B هي مجموعة جزئية من المستقيم AB

$\because A\text{-}B=C\text{-}D$ اذن القطعه C-Dهي مجموعة جزئية من المستقيم AB

$\because A,B,C$ تقع على مستقيم واحد AB

$\therefore$ منA7 تتحقق واحده فقط ممايلي

$A-B-C \vee A-C-B \vee C-A-B$

1) عندما C-A-B

$\because A\text{-}B\neq\Phi$ [مبرهنه11] اذن توجد نقطة مثل H بحيث ان $H\in A\text{-}B$

$\Leftarrow C\text{-}A\text{-}B$, $A\text{-}H\text{-}B \Leftarrow C\text{-}A\text{-}H\text{-}B$(مبرهنة 4)

$\Leftarrow C\text{-}A\text{-}H$, $\because A\text{-}B=C\text{-}D$

$\Leftarrow H\in C\text{-}D \Leftarrow C\text{-}H\text{-}D$

$\therefore C\text{-}A\text{-}H, C\text{-}H\text{-}D \Leftarrow C\text{-}A\text{-}H\text{-}D$ (مبرهنة 4)

$\Leftarrow C\text{-}A\text{-}D \Leftarrow A\in C\text{-}D$ و بماان $A\text{-}B=C\text{-}D$

$A\in A\text{-}B$ وهذا يناقض مبرهنة 10

وبنفس الطريقه نصل الى تناقض عندما A-B-C,A-C-B

$\therefore \{A,B\}=\{C,D\}$

مبرهنة 15/ لتكن A-B قطعة و A-R-B فان A-R وR-B مجموعتان جزئيتان من A-B

البرهان/

لكي نبرهن بان القطعة A-R هي مجموعة جزئية من القطعة A-B يجب ان نبرهن بان لكل $X\in A-R$ فان $X\in A-B$

$X\in A-R \Leftarrow A-X-R$ و $A-R-B \Leftarrow A-X-R-B$ (مبرهنة 4)

$\Leftarrow A-X-B \Leftarrow X\in A-B$

وبنفس الطريقة نبرهن بان القطعة R-B هي مجموعة جزئية من A-B

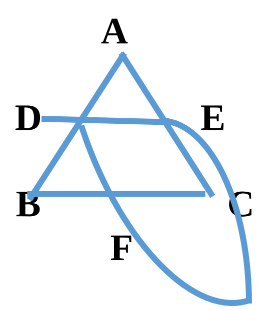
بديهية باخ:

تعريف المثلث: لتكن A,B,C ثلاث نقاط مختلفة ولاتقع على مستقيم واحد,ان اتحاد {A,B,C} مع القطع B-C, A-C, A-B يدعى مثلث وتدعى A,B,C الرؤوس , تدعى B-C, A-C, A-B الاضلاع, الخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع, المثلث الذي يتعين من A,B,C يرمز له بالرمز ΔABC

A10 : اذا كانت A,B,C رؤوس مثلث وm هومستقيم لايمر باي راس من هذه الرؤوس ويحتوي m على نقطة من الضلع A-B فان m يحتوي كذلك على نقطة من الضلع A-C او B-C.

مبرهنة 17/ اذا كانت A,B,C رؤوس مثلث,اي مستقيم m يحتوي على نقطة من الضلع A-B ونقطة من الضلع A-C فانه لايمكن ان يحتوي على نقطة من الضلع B-C

البرهان/



نفرض ان المستقيم m يحتوي على النقاط D,E,F بحيث ان

$D\in A-B,\ E\in A-C,\ F\in B-C$

$\therefore$ هذه النقاط مختلفة (من الفرض) وباستخدام (مبرهنة 2)

$\therefore$ من A7 تتحقق واحدة فقط ممايلي

$D-E-F \vee D-F-E \vee F-D-E$

عندما $D-E-F \Leftarrow E \in D-F$

$\because F\in B-C \Leftarrow$ Fتقع عل المستقيم BC (مبرهنه 13)

وكذلك النقطة D تقع على المستقيم AB

$\therefore$ D,B,F لاتقع على مستقيم واحد

$\therefore$ يتكون لدينا المثلث DBF

$\therefore$ من A10 المستقيم AC الذي يقطع الضلع D-F في النقطة E يجب ان يقطع احد الضلعين $B-F \vee D-B$ وهذا غير ممكن (مبرهنة 2, A7)

وبنفس الطريقة نتوصل الى تناقض في الحالتين $D-F-E \vee F-D-E$

$\therefore$ المستقيم الذي يقطع ضلعين في مثلث فانه لايقطع الضلع الثالث

تعريف / تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان اي نقطتين تنتميان الى S مثل P,Q فان القطعة P-Q تكون مجموعة جزئية من S

مبرهنة 23/

1) اي مستقيم يكون مجموعة محدبة
2) كل من جهتي النقطة O هي مجموعة محدبة

البرهان/

برهان الفرع 1)

ليكن m مستقيم ولتكن A,B اي نقطتين على m

$\therefore$ **A,B تعينان القطعة A-B (من تعريف القطعة)**

$\because$ **القطعة A-B مجموعة جزئية من m(مبرهنة 13)**

$\therefore$ **m مجموعة محدبة (من تعريف المجموعة المحدبة)**

برهان الفرع 2)

اولا/ يجب ان نبرهن بان S1 مجموعة محدبة

لتكن X1,Y1 اي نقطتين في S1 ,يجب ان نبرهن بان القطعة X1-Y1 هي مجموعة جزئية من S1

$\because$ $X1\text{-}Y1 \ni X \Leftarrow X1\text{-}X\text{-}Y1$

$X1 \in S1 \Leftarrow O\text{-}A\text{-}X1 \vee O\text{-}X1\text{-}A \vee X1=A$

$Y1 \in S1 \Leftarrow O\text{-}A\text{-}Y1 \vee O\text{-}Y1\text{-}A \vee Y1=A$

1)عندما O-A-X1 وO-A-Y1 و X1≠Y1

$\therefore$ **اما O-X1-Y1 او O-Y1-X1 (مبرهنة 5)**

- **عندما O-X1-Y1**

$\because$ **X1-X-Y1 ⇐ O-X1-X-Y1 (مبرهنة 4)**

⇐O-X-Y1 و ∵ O-A-Y1

$\therefore$ **اما X=A ⇐ X∈S1**

او X≠A

اما O-A-X او O-X-A (مبرهنة 5) ⇐ X∈S1

- **عندما O-Y1-X1**

$\because$ **X1-X-Y1 ⇐ O-Y1-X-X1 (A5+ مبرهنة 4)**

⇐O-X-X1 و ∵ O-A-X1

$\therefore$ **اما X=A ⇐ X∈S1**

او X≠A

اما O-A-X او O-X-A (مبرهنة 5) ⇐ X∈S1

2)عندما O-X1-A وO-Y1-A وX1≠Y1

$\therefore$**اما O-X1-Y1 او O-Y1-X1 (مبرهنة 5)**

- **عندما O-X1-Y1**

$\because$ **X1-X-Y1 ⇐ O-X1-X-Y1 (مبرهنة 4)**

⇐O-X-Y1 و ∵ O-Y1-A ⇐ O-X-Y1-A (مبرهنة 4)

⇐ O-X-A ⇐ X∈S1

- **عندما O-Y1-X1**

$\because$ **X1-X-Y1 ⇐ O-Y1-X-X1 (A5+ مبرهنة 4)**

⇐O-X-X1 و ∵ O-X1-A

⇐ O-X-X1-A(مبرهنة4)

⇐ O-X-A ⇐ X∈S1

3)عندما O-X1-A وO-A-Y1

⇐ O-X1-A-Y1 (مبرهنة4)

$\Leftarrow$ O-X1-Y1 و $\because$ X1-X-Y1
$\Leftarrow$ O-X1-X-Y1 (مبرهنة 4)
$\Leftarrow$ O-X1-X و $\because$ O-X1-A
عندما X=A $\Leftarrow$ X∈S1
عندما X≠A $\Leftarrow$ اما O-X-A او O-A-X(مبرهنة 5) $\Leftarrow$ X∈S1
4)عندما X1=A و O-Y1-A او O-A-Y1
$\Leftarrow$ O-Y1-X1 او O-X1-Y1
$\because$ X1-X-Y1
$\Leftarrow$ اما O-Y1-X-X1(مبرهنة A5+4) او O-X1-X-Y1(مبرهنة 4)
$\therefore$ اما O-X-X1 او O-X1-X و $\because$ X1=A
$\therefore$اما O-X-A او O-A-X $\Leftarrow$ X∈S1
5) عندما O-A-X1و O-Y1-A(البرهان مشابه للحالة 3))
6) عندما Y1=A وO-X1-A او O-A-X1 (البرهان مشابه للحالة 4))

ثانيا/ يجب ان نبرهن بان S2 مجموعة محدبه
لتكن X2,Y2 نقطتين مختلفتين في S2
يجب ان نبرهن بان S2 هي مجموعة محدبة
لتكن X2,Y2 نقطتين مختلفتين في S2 ,يجب ان نبرهن القطعة X2-Y2 هي مجموعة جزئية من S2
X ∈ X2-Y2 $\Leftarrow$ X2-X-Y2
X2 ∈S2 $\Leftarrow$ X2-O-A $\Leftarrow$ A-O-X2 (A5)
Y2 ∈S2 $\Leftarrow$ Y2-O-A $\Leftarrow$ A-O-Y2 (A5)
اما O-X2-Y2 او O-Y2-X2 (مبرهنة 5)
عندما O-X2-Y2 و X2-X-Y2 $\Leftarrow$ O-X2-X-Y2 (مبرهنة 4)
$\Leftarrow$ O-X2-X $\Leftarrow$ X-X2-O
$\because$ X2-O-A $\Leftarrow$ X-X2-O-A(مبرهنة 4)
$\Leftarrow$ X-O-A $\Leftarrow$ X∈S2
عندما O-Y2-X2 و X2-X-Y2 $\Leftarrow$ O-Y2-X-X2(مبرهنة A5+4)
$\Leftarrow$ O-Y2-X $\Leftarrow$ X-Y2-O (A5)
و $\because$ Y2-O-A $\Leftarrow$ X-Y2-O-A (مبرهنة4)
$\Leftarrow$ X-O-A $\Leftarrow$ X∈S2
اذن كل من S1,S2 مجموعة محدبة

مبرهنة 24/ كل قطعة هي مجموعة محدبة

البرهان/

لتكن A-B قطعه ولتكن X,Y اي نقطتين مختلفتين في القطعة A-B

يجب ان نبرهن بان القطعة X-Y هي مجموعة جزئية من A-B

$X \in A\text{-}B \Rightarrow A\text{-}X\text{-}B$

$Y \in A\text{-}B \Rightarrow A\text{-}Y\text{-}B$

$Z \in X\text{-}Y \Rightarrow X\text{-}Z\text{-}Y$

اذن اما A-X-Y او A-Y-X (مبرهنة 5)

عندما A-X-Y و X-Z-Y ⇐ A-X-Z-Y (مبرهنة 4)

⇐ A-Z-Y و ∵ A-Y-B

⇐ A-Z-Y-B(مبرهنة 4)

⇐ A-Z-B ⇐ Z ∈ A-B

عندما A-Y-X وX-Z-Y ⇐ A-Y-Z-X (A5 ومبرهنة4)

⇐ A-Z-X و ∵A-X-B

⇐ A-Z-X-B (مبرهنة 4)

⇐ A-Z-B ⇐ Z ∈A-B

اذن القطعة A-B مجموعة محدبة

مبرهنة 26/ تقاطع n من المجموعات المحدبة هي مجموعة محدبة

البرهان/

لتكن $A=A1\cap A2\cap A3\cap\ldots\cap An$

حيث ان A1,A2,…,An هي مجموعات محدبة, يجب ان نبرهن بان لكل نقطتين مختلفتين X,Y في A

$\Leftarrow X\text{-}Y\subseteq A$

$X,Y\in A \Rightarrow X,Y \in A1\cap A2\cap A3\cap\ldots\cap An$

$\Rightarrow X, Y \in A1\wedge\ X, Y \in A2 \wedge \ldots \wedge\ X, Y \in An$

∵ A1,A2,…,An هي مجموعات محدبة

$\Rightarrow X\text{-}Y\subseteq A1\ \wedge\ X\text{-}Y \subseteq A2\ \wedge\ldots\wedge X\text{-}Y \subseteq An$

$\Rightarrow X\text{-}Y\subseteq A1\cap A2\cap A3\cap\ldots\cap An$

$\Rightarrow X\text{-}Y\subseteq A$

اذن A مجموعة محدبة

تعريف /

مجموعة كل النقاط على مستقيم في نفس الجهه من النقطة O تدعى شعاع ,تدعى O نقطة البداية , الشعاعان المناظران لجهتي O يدعيان شعاعين متعاكسين, يرمز للشعاع الذي بدايته A وB نقطة على الشعاع بالرمز $\overrightarrow{AB}$ **.اي ان الشعاع** $\overrightarrow{AB}$ **هو مجموعة كل النقاط X على المستقيم AB بحيث ان A لاتقع بين B وX اي بتعبير اخر** $A\text{-}X\text{-}B\ \vee\ A\text{-}B\text{-}X$

مبرهنة 28/

1) **الشعاع هو مجموعة محدبة**
2) **الشعاع هو مجموعة جزئية من المستقيم**
3) **للشعاع نقطة بداية وحيدة**
4) **نقطة بداية الشعاع لاتنتمي للشعاع**
5) **لكل شعاع يوجد شعاع واحد معاكس له**
6) **الشعاع الذي نقطة بدايته على مستقيم لكنه لايقع على المستقيم فان كل نقاطه تقع في نفس الجهه من المستقيم**
7) **يتعين الشعاع من نقطة بدايته واي نقطه من نقاطه**

البرهان/

6) نفرض ان العبارة خاطئة فتوجد نقطة مثل C على الشعاع $\overrightarrow{OB}$ بحيث ان C تقع في الجهه المعاكسة للمستقيم m التي تحتوي على B .اي ان B,C في جهتين متعاكستين من m
(من تعريف الفصل ومبرهنة 20) حيث ان m يفصل جهتيه
∴ توجد نقطة مثل Q تقع على m بحيث ان C-Q-B $\Leftarrow$ (A6) $Q \in CB$
∵ النقطة O تقع على المستقيم CB (الشعاع هو مجموعة جزئية من المستقيم)
اي ان المستقيم CB يقطع المستقيم m في النقطتين O,Q
∴ O=Q (مبرهنة 2)
∵ C-Q-B $\Leftarrow$ C-O-B
∴C,B في جهتين متعاكستين من O على المستقيم CB
بتعبير اخر C,B في شعاعين متعاكسين نقطة بدايتهما O وهذا يخالف الفرض(C,B تقعان على الشعاع $\overrightarrow{OB}$). ∴ كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{OB}$ تقع في نفس الجهه من m

داخل وخارج المثلث

داخل ABC ∆: هو مجموعة كل النقاط الناتجة من

1) **جهة المستقيم AB التي تحتوي C**
2) **جهة المستقيمAC التي تحتوي B**
3) **جهة المستقيم BC التي تحتوي A**

خارج المثلث :هو مجموعة كل النقاط التي لاتقع على المثلث ولاتقع في داخله

مبرهنة 29/

داخل المثلث هو مجموعة محدبة

البرهان/ ليكن ABC مثلث

داخل المثلث ABC هو تقاطع :

جهة المستقيم AB التي تحتوي C

جهة المستقيمAC التي تحتوي B

جهة المستقيم BC التي تحتوي A

بمان جهة المستقيم هي مجموعة محدبة (مبرهنة 25)

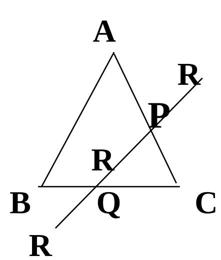
وبمان تقاطع ثلاث مجموعات محدبة هي مجموعة محدبة (مبرهنة 26)

∴ داخل المثلث ABC هو مجموعة محدبه

مبرهنة 30/

اذا كانت P,Q نقطتين على ضلعي مثلث و R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث فان P-R-Q

البرهان/



ليكن ABC مثلث و P نقطة على الضلع A-C

و Q نقطة على الضلع B-C

و R نقطة على المستقيم PQ وفي داخل المثلث

∴ من A7 تتحقق واحدة فقط ممايلي

P-Q-R ∨ P-R-Q ∨ R-P-Q

نفرض بان P-Q-R متحققه

∵ Q تقع على المستقيم B-C

∴ P,R في جهتين متعاكستين من B-C

∵ الشعاع $\overrightarrow{CA}$ لايقع على المستقيم B-C لكن نقطة بدايته C تقع على المستقيم BC

∴ جميع نقاط الشعاع $\overrightarrow{CA}$ تقع في نفس الجهه من B-C (مبرهنة 28 فرع 6)

اي ان P,A في نفس الجهه من B-C

∴ A,R تقعان في جهتين متعاكستين من B-C (مبرهنة 27 فرع 1)

اي ان R لاتقع في جهة B-C التي تحتوي A وهذا يناقض الفرض لان R في داخل المثلث

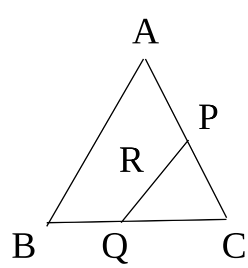
وبنفس الطريقة نصل الى تناقض اذا فرضنا R-P-Q

∴ P-R-Q متحققه

مبرهنة 31/ اذا كانت P,Q نقطتين على ضلعي مثلث فان القطعة P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث

البرهان/ ليكن ABC مثلث وفيه النقطة P على الضلع A-C
والنقطة Q على الضلع B-C ولتكن R نقطة على القطعة P-Q
يجب ان نبرهن بان R تقع في داخل المثلث

∵ الشعاع $\overrightarrow{CA}$ لايقع على المستقيم BC وان نقطة بدايته C تقع على B-C(مبرهنة 28 فرع6)
اي ان P,A في نفس الجهه من B-C
∵P-Q ∋R ⇐ P-R-Q
∴ P,R تقعان على الشعاع $\overrightarrow{QP}$
∵ Q تقع على المستقيم BC
∴ كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{QP}$ تقع في نفس الجهه من B-C (مبرهنة 28 فرع6)
اي ان R,Pفي نفس الجهه من B-C
∴ A,R تقعان في نفس الجهه من B-C (مبرهنة 27 فرع 3)
اي ان Rتقع في جهة B-C التي تحتوي A
وبنفس الطريقة نبرهن بان R تقع في جهة A-C التي تحتوي B
∵ Q,C تقعان على الشعاع $\overrightarrow{BC}$ *وان الشعاع $\overrightarrow{BC}$ لايقع على المستقيم* AB
∴ كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{BC}$ تقع في جهه واحدة من المستقيم AB(مبرهنة 28 فرع6)
اي ان Q,C تقع في نفس الجهه من A-B
وبنفس الطريقة بالنسبة الى P,C
∴ P,Q في جهة المستقيم AB التي تحتوي C (مبرهنة 27 فرع 3)
∵ جهة المستقيم AB التي تحتوي C هي مجموعة محدبة (مبرهنة 25)
∴P-Q هي مجموعة جزئية من جهة A-B التي تحتوي C
∵ R ينتمي الى P-Q
∴ R في جهة المستقيم AB الذي يحتوي C
∴ R تقع في داخل المثلث
∴ القطعة P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث



مبرهنة 32/ داخل المثلث هو مجموعة غير خالية

البرهان/ليكن ABC مثلث

توجد نقطة مثل P بحيث ان A-P-C وتوجد نقطة مثل Q بحيث ان A-Q-B [A9]

∴ P تختلف عن Q(مبرهنة 2)

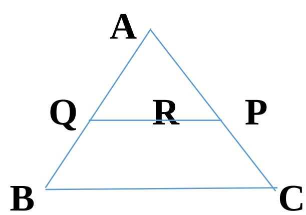
∴ توجد نقطة مثل R بحيث ان P-R-Q [A9]

∵ R∈ P-Q

∵ P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث (مبرهنة 31)

∴ R في داخل المثلث

∴ داخل المثلث ABC هو مجموعة غير خالية



تعريف/ في اي مثلث ,الضلع الذي لايحتوي احد رؤوس المثلث كنقطة نهايته يدعى الضلع المقابل لذلك الراس والراس يدعى بالراس المقابل.

مبرهنة 34/ المستقيم الذي يمر براس مثلث ونقطة في داخل مثلث فانه يقطع الضلع المقابل

البرهان/

ليكن m مستقيما يمر من الراس A للمثلث ABC اي انه يقطع كلا الخطين AC وAB لذلك فان m لايمكن ان يقطعهما مره ثانية (مبرهنة 2)

نفرض ان m يمر من النقطة P في داخل المثلث , ناخذ اي نقطة Q على الضلع AC

∴ من (A10) اذا كان الخط في Q لايحتوي على راس فانه يقطع اما الضلع A-B او الضلع B-C

الحالة الاولى /الشكل (1)

نفرض بان المستقيم PQ يقطع الضلع A-B في نقطة S

∴ S-P-Q(مبرهنة 30)

∴ في المثلث QCS و∵ S-P-Q

فانه من(بديهية باخ) ⟸ الخط AP طالما لايمكن ان يقطع المستقيم AC مره ثانية

فانه يقطع القطعة S-C في نقطة ولتكن D

∴ S-D-C

ومره ثانية في المثلث BCS تتحقق بديهية باخ ⟸ الخط AD لايمكن ان يقطع الخط AB مرة ثانية فانه يجب ان يقطع الضلع B-C

الحالة الثانية/الشكل (2)

نفرض ان المستقيم PQ يقطع الضلع B-C في نقطة مثل T

∴ Q-P-T (مبرهنة 30)

∴ من بديهية باخ ⟸ في المثلث QTC

∵ AP لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية فانه يجب ان يقطع الضلع TC

∴ اي انه يقطع الضلع B-C

الحالة الثالثة/الشكل (3)

نفرض بان المستقيم PQ يحتوي على راس

∴ لايمكن ان يحتوي على A,C

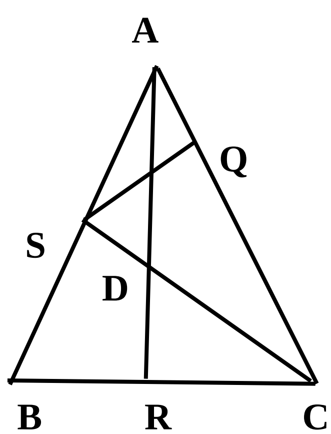
لذلك فانه يحتوي على B

∵ Q تقع على الخط AC والنقطتين P,B تقعان على نفس الجهه من ACو P في داخل المثلث

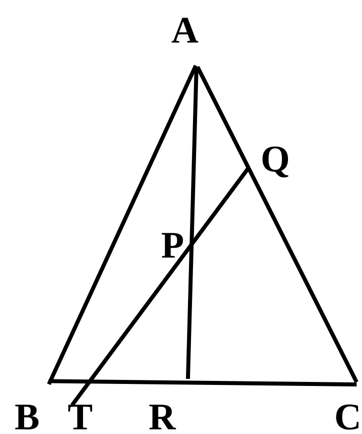
∴ Q-P-B

∴ من بديهية باخ في المثلث QBC

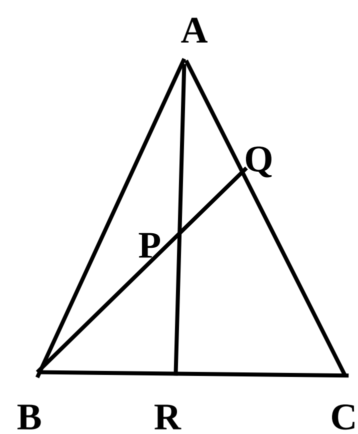
∵AP لايمكن ان يقطع المستقيم AC مرة ثانية فانه يجب ان يقطع الضلع B-C



(1)



(2)



(3)

مبرهنة 35/ المستقيم الذي يمر في نقطة داخل مثلث لكنه لايحتوي على راس من مثلث فانه يقطع في الاقل احد الاضلاع

البرهان /

ليكن P نقطة في داخل المثلث ABC وليكن m مستقيم يمر من P

ناخذ اي نقطة على ضلع ولتكن Q على A-C

اذا كان m يحتوي على Q فان هذا يؤدي الى البرهان

اذا كان m لايحتوي على Q

ناخذ الخط PQ

من بديهية باخ $\Leftarrow$ اذا كان الخط PQ لايحتوي على B فانه اما يقطع الضلع A-B او الضلع B-C

اذا كان الخط PQ يقطع الضلع A-B في نقطة ولتكن R فانه يتكون لدينا المثلث ARQ

واذا كان الخط PQ يقطع الضلع B-C في نقطه ولتكن S فانه يتكون لدينا المثلث QCS

$\therefore$ R-P-Q (مبرهنة 30) وفي الحاله الثانية فان Q-P-S (مبرهنة 30)

وفي اي حالة باستخدام بديهية باخ

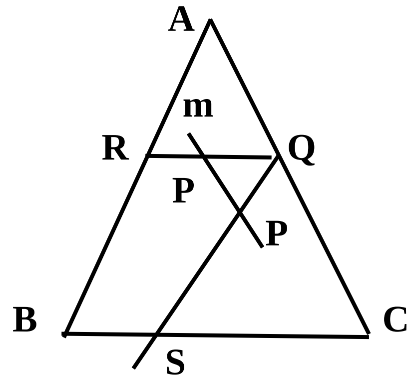
$\therefore$ m يقطع اما A-R او A-Q في المثلث ARQ

او يقطع C-S او Q-C في المثلث QCS

لذلك فانه في اي حاله يقطع احد اضلاع المثلث ABC

اذا كان المستقيم PQ يحتوي على راس المثلث B

$\therefore$ Q-P-B وبنفس الطريقه السابقه نتوصل الى ان m يقطع اما الضلع B-C او الضلع A-C



الزوايا

تعريف : ليكن $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ شعاعين مختلفين لا يقعان على مستقيم واحد و لهما نقطة بداية مشتركة ، اتحاد الشعاعين مع نقطة البداية يدعى زاوية .

الشعاعين هما ضلعي الزاوية ، المستقيم الذي يحتوي الضلع يدعى خط الضلع ، نقطة البداية تدعى رأس الزاوية .

الرمز : يرمز للزاوية التي هي اتحاد الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ بالرمز

$\angle BAC$ أو $\angle CAB$ و للاختصار $\angle A$

مبرهنة 36 /

ليكن $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ شعاعين لا يقعان على مستقيم واحد و أن B' على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و C' على الشعاع $\overrightarrow{AC}$ فأن :

$$\angle B'AC = \angle B'AC = \angle BAC' = \angle BAC$$

قاعدة لغوية :

زاوية المثلث : هي الزاوية التي يكون رأسها هو رأس في مثلث وقطعتي المثلث التي يكون الرأس كنقطة نهايتها كمجموعتين جزئيتين من ضلعيها .

الضلع المقابل للزاوية : هو ضلع المثلث الذي لا يكون رأس الزاوية كنقطة نهايته وهذا يعني مثلاً الضلع المقابل للزاوية BAC هو نفس الضلع المقابل للرأس A .

تعريف :

داخل الزاوية BAC : هو تقاطع جهة الشعاع AC التي تحتوي B وجهة الشعاع AB التي تحتوي C .

خارج الزاوية : هو مجموعة كل النقاط التي لا تقع في داخل الزاوية ولاعلى الزاوية .

مبرهنة 37 / للزاوية يوجد رأس واحد فقط

مبرهنة 38/ داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية .

البرهان :

∵داخل المثلث هو مجموعة جزئية من داخل الزاوية .

∵ داخل المثلث هو مجموعة غير خالية (مبرهنة 32)

∴ داخل الزاوية مجموعة غير خالية .

مبرهنة 39/ داخل الزاوية مجموعة محدبة .

البرهان/ لتكن BAC زاوية

∵داخل الزاوية BAC هو تقاطع جهة الشعاع AB التي تحتوي C , جهة الشعاع AC التي تحتوي B .

∵ جهة المستقيم هي مجموعة محدبة (مبرهنة25)

∵ تقاطع n من المجموعات المحدبة (n = 2) هو مجموعة محدبة(مبرهنة 26)

∴ داخل الزاوية BAC هو مجموعة محدبة .

مبرهنة 40 / إذا كانت D نقطة في داخل $\prec$ BAC فان كل نقاط الشعاع AD تقع في داخل $\prec$ BAC

البرهان :

∵النقطة D تقع في داخل الزاوية BAC

∴ D لا تقع على $\overrightarrow{AB}$ ولا على $\overrightarrow{AC}$

∵ نقطة بداية الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع على المستقيم AB

∴ كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في نفس الجهة من المستقيم AB (مبرهنة 28 فرع 6)

∵D تقع في جهة AB التي تحتوي C [لأن D في داخل الزاوية]

.·. كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في جهة AB التي تحتوي C .

·:· نقطة بداية الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع على AC .

.·.كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في نفس الجهة من AC (مبرهنة 28 فرع 6)

·:·D تقع في جهة AC التي تحتوي B [D في داخل الزاوية]

.·.كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في جهة AC التي تحتوي B .

.·. كل نقاط الشعاع AD تقع داخل الزاوية [من تعريف داخل الزاوية] .

مبرهنة 41/إذا كانت P, Q نقطتين على ضلعي زاوية و R نقطة على المستقيم PQ و في داخل الزاوية فان P-R-Q .

البرهان/

لتكن BAC $\prec$ زاوية وفيها $P\in \overrightarrow{AB}$ و$Q\in \overrightarrow{AC}$ وR ينتمي للمستقيم PQ وان R في داخل الزاوية يجب ان نبرهن P-R-Q

∵R تقع في داخل BAC $\prec$ وان P,Q تقع على ضلعي الزاوية

∴P,R,Q نقاط مختلفة و∵النقاط تقع على مستقيم واحد

∴ من A7 يتحقق واحدة فقط مما يلي

R-P-Q∨P-R-Q∨P-Q-R

عندما R-P-Q

∵ $P\in \overrightarrow{AB}$ ⇐ R,Q في جهتين متعاكستين من AB

∵$\overrightarrow{AC}$ لايقع على المستقيم AB لكن نقطة بدايته A تقع على المستقيم AB

∴جميع نقاط $\overrightarrow{AC}$ تقع في نفس الجهه من المستقيم AB (مبرهنة 28 فرع6)

∵ Q, C ينتمون الى الشعاع $\overrightarrow{AC}$

∴ Q, C في نفس الجهه من المستقيم AB

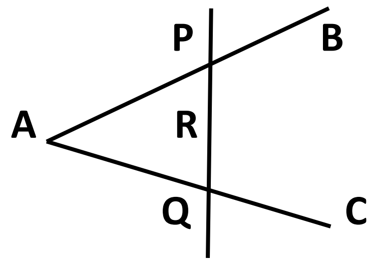
∴R,C تقعان في جهتين متعاكستين من AB (مبرهنة27فرع1)

اي ان R لاتقع في جهة AB التي تحتوي C

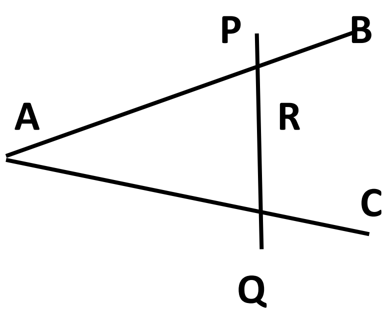
وهذا يؤدي ان R لاتقع في داخل زاوية BAC وهذا تناقض

وبنفس الطريقة نصل الى تناقض اذا فرضنا P-Q-R

∴P-R-Q متحققه



مبرهنة 42/ إذا كانت P , Q نقطتين على ضلعي زاوية فأن P-Q مجموعة جزئية من داخل الزاوية .



البرهان :

لتكن BAC $\prec$ زاوية و $P \in \overrightarrow{AB}$ و $Q \in \overrightarrow{AC}$

لتكن $R \in$ P-Q

يجب أن نبرهن إن R تقع في داخل الزاوية BAC .

$\because$ $R \in$ P-Q $\Leftarrow$ P-R-Q

أي أن : Q, R تنتمي إلى الشعاع $\overrightarrow{PQ}$

$\because$ الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ لا يقع على AB و P تنتمي للمستقيم AB .

$\therefore$ كل نقاط الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ تقع في نفس الجهة من المستقيم AB (مبرهنة 28 (6))

أي إن Q ,R في نفس الجهة من AP = AB هذا يعني إن R في جهة AP التي تحتوي Q

و بنفس الطريقة نبرهن أن R تقع في جهة AQ التي تحتوي P .

$\therefore$ R تقع في داخل الزاوية PAQ [من تعريف داخل الزاوية]

$\because$ BAC $\prec$ = PAQ $\prec$ [مبرهنة36]

$\therefore$ R تقع في داخل الزاوية BAC $\prec$

$\therefore$ P-Q مجموعة جزئية من داخل BAC $\prec$

....

مبرهنة 43/ أذا كانت D نقطة في داخل الزاوية $\angle BAC$ فان الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقطع القطعة . B-C

البرهان/∵النقطة D تقع في داخل $\angle BAC$

∴D تقع في جهة AB التي تحتوي C وفي جهة AC التي تحتوي B

∴ اما D تقع على المستقيم BC او لاتقع عليه

1)نفرض ان D تقع على المستقيم BC

∵ B,C نقطتين على ضلعي زاوية BAC وD تقع في داخل الزاوية

∴ B-D-C (مبرهنة 41) اي ان $\overrightarrow{AD}$ يقطع القطعة B-C

2)اذا كانت D لاتقع على المستقيم BC

∴D تقع في جهة BC التي تحتوي A اوفي جهة BC التي لا تحتوي A (مبرهنة 20)

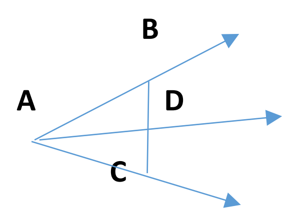
- اذا كانت D تقع في جهة BC التي تحتوي A

∵D تقع في جهة AB التي تحتوي C وفي جهة AC التي تحتوي B

∴ D تقع في داخل المثلث ABC

∴ الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقطع القطعة B-C(مبرهنة 34)

- اذا كانت D تقع في جهة BC التي لا تحتوي A (واجب)



مبرهنة 44/

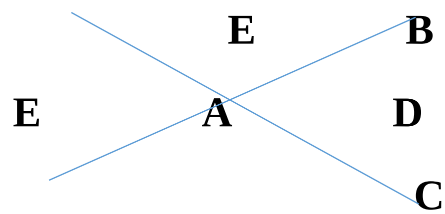
أذا كانت D نقطة في داخل الزاوية BAC و E أي نقطة في خارج الزاوية فان القطعة D-E تقطع الزاوية .

البرهان/ :D تقع في داخل $\prec$ BAC

:.D تقع في جهة AB التي تحتوي C وفي جهة AB التي تحتوي B

:E تقع خارج الزاوية

:.E لاتقع في داخل الزاوية ولا على الزاوية (من تعريف الزاوية)



:.توجد عدة احتمالات هي

1) E تقع على الشعاع المعاكس $\overrightarrow{AB}$

2) E تقع على الشعاع المعاكس $\overrightarrow{AC}$

3) E تقع في جهة المستقيم AB التي لاتحتوي على C

4) E تقع في جهة المستقيم AC التي لاتحتوي على B

البرهان/

- الحالة(1)

نفرض بان E تقع على الشعاع المعاكس $\overrightarrow{AB}$ اي ان E-A-B

وهذا يؤدي الى E,B في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$

: D تقع في جهة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B

:. D,E في جهتين متعاكستين من AC (مبرهنة 27 فرع 1)

∴ توجد نقطة مثل H على AC بحيث ان D-H-E (مبرهنة 20 وتعريف الفصل)

∴القطعة D-E تقطع BAC $\prec$

- الحالة (2) بنفس الطريقة في الحالة (1)
- الحالة (3)

نفرض E تقع في جهة المستقيم AB التي لا تحتوي على C

∵D تقع في جهة المستقيم AB التي تحتوي C

∴E,D تقعان في جهتين متعاكستين من AB (مبرهنة 27 فرع1)

∴ توجد نقطة مثل H على المستقيم AB بحيث ان D-H-E (مبرهنة 20 وتعريف الفصل)

∴ $H \in AB$

∴ $H \in \overrightarrow{AB}$ او H=A او H على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$

∴ اذا كانت $H \in \overrightarrow{AB} \Leftarrow$ فان القطعة D-E تقطع BAC $\prec$

وفي حالة H=A $\Leftarrow$ فان القطعة D-E تقطع BAC $\prec$

وفي حالة H على الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB} \Leftarrow$ ∴H-A-B

∴ H,B في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$

∵ D في جهه الشعاع $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B

∴ H,D في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{AC}$ (مبرهنة 27 فرع 1)

∴ توجد نقطة مثل R على $\overrightarrow{AC}$ بحيث ان D-R-H (مبرهنة 20 وتعريف الفصل)

∵ D-H-E وD-R-H (مبرهنة 4)$\Leftarrow$ D-R-H-E

∴ D-R-E $\Leftarrow$ $R \in$ D-E و∵$R \in \overrightarrow{AC}$

∴ القطعة D-E تقطع BAC $\prec$

- الحالة (4) بنفس الطريقه في الحالة (3)

تعريف : لتكن BAC زاوية متكونة من الشعاعين $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$ نقول ان الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يكون بين الشعاعين $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$ إذا وفقط اذا كان الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع في داخل الزاوية $\prec BAC$.

مبرهنة 45 / الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$ إذا وفقط إذا توجد نقطة مثل $\acute{B}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونقطة مثل $\acute{C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ونقطة مثل D على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ بحيث أن $\acute{B}-\acute{D}-\acute{C}$

البرهان/ ألاتجاه الأول :

نفرض إن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$ إي إن $\overrightarrow{AD}$ يقع في داخل الزاوية BAC (من التعريف السابق)

توجد نقطة مثل $\acute{B}$ على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ونقطة مثل $\acute{C}$ على الشعاع $\overrightarrow{AC}$ [A9]

$\therefore \prec \acute{B}A\acute{C} = \prec B\,A\,C$ [مبرهنة 36]

$\therefore$ الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع في داخل الزاوية $\acute{B}A\acute{C} \prec$

$\therefore$ الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقطع القطعة $\acute{B}-\acute{C}$ في نقطة مثل $\acute{D}$ [مبرهنة43]

$\therefore \acute{B}-\acute{D}-\acute{C}$

الاتجاه الثاني :

نفرض إنه توجد نقاط $\acute{B} \in \overrightarrow{AB} , \acute{C} \in \overrightarrow{AC} , \acute{D} \in \overrightarrow{AD} \ni \acute{B}-\acute{D}-\acute{C}$

$\therefore \acute{D}$ تقع في داخل الزاوية BAC [مبرهنة42]

$\because \acute{D}$ تنتمي للشعاع $\overrightarrow{AD}$

$\therefore$ كل النقاط الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل الزاوية BAC [مبرهنة40]

$\therefore$الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع بين $\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}$ (التعريف)

مبرهنة46/

أ- أذا كان $\overrightarrow{AD}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ وكان الشعاع $\overrightarrow{AE}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ فأن الشعاع $\overrightarrow{AE}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$

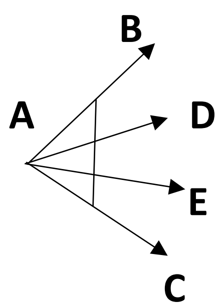
ب- إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AD}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ وكان الشعاع $\overrightarrow{AC}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$ (حيث أن E تقع في جهة $\overrightarrow{AB}$ التي تحتوي D) فأن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$.

البرهان/ أ)

$\because$ الشعاع $\overrightarrow{AD}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ توجد نقاط مثل B-D-C $\ni$ B $\in$ AB , C $\in$ AC , D $\in$ AD (مبرهنة 45)

$\therefore$ $\angle DAC = \angle DAC$ (مبرهنة 36)



$\because$ الشعاع $\overrightarrow{AE}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

$\because$ $\overrightarrow{AE}$ يقع في داخل $\angle DAC$ (التعريف السابق)

$\therefore$ $\overrightarrow{AE}$ يقع في داخل $\angle DAC$ (التعريف السابق)

$\therefore$ $\overrightarrow{AE}$ يقطع القطعة D-C في النقطة E (مبرهنة 43)

$\therefore$ D-E-C

$\because$ B-D-C و D-E-C $\Leftarrow$ B-D-E-C (مبرهنة 4)

$\therefore$ B-E-C

$\because$ B $\in \overrightarrow{AB}$, C $\in \overrightarrow{AC}$, E $\in \overrightarrow{AE}$

$\therefore$ الشعاع $\overrightarrow{AE}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ (مبرهنة 45)

مبرهنة 47 /

إذا كان $\overrightarrow{OB}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ وكان الشعاع $\overrightarrow{OD}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{OA}$ فأن $\overrightarrow{OC}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$

البرهان :

∵ الشعاع $\overrightarrow{OB}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و$\overrightarrow{OC}$

∴ الشعاع $\overrightarrow{OB}$ يقع في داخل الزاوية $\angle AOC$ [من التعريف]

∴ B تقع في جهة $\overrightarrow{OC}$ التي تحتوي A

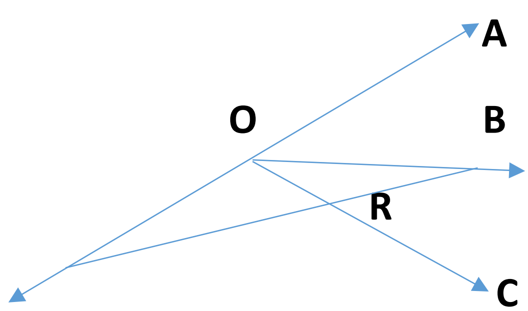
∵ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$ شعاعين متعاكسين و النقطة O هي بداية الشعاع $\overrightarrow{OC}$

∴ A , D في جهتين متعاكستين من الشعاع $\overrightarrow{OC}$

∴ النقطتين D , B في جهتين متعاكستين من $\overrightarrow{OC}$ (مبرهنة 27 فرع 1)

∴ توجد نقطة مثل R على الشعاع $\overrightarrow{OC}$ بحيث إن D-R-B [مبرهنة 20 و تعريف الفصل]

∴ الشعاع $\overrightarrow{OC}$ يقع بين الشعاعين $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ [مبرهنة 45]



تعريف : (رباعي الأضلاع المحدب)

لتكن A,B,C,D أربع نقاط مختلفة لا توجد ثلاثة منها على مستقيم واحد ، اتحاد النقاط الأربعة A,B,C,D مع القطع الأربعة A-B , A-C , C-D , B-D يدعى رباعي الأضلاع ، النقاط A,B,C,D تدعى الرؤوس و القطع تدعى الأضلاع و الخطوط التي تحتوي الأضلاع تسمى خطوط الأضلاع .

الضلعان اللذان لهما نقطة نهاية مشتركة يدعيان متجاورين والضلعان الغير متجاورين يدعيان متقابلين .

زاوية رباعي الأضلاع :هي الزاوية التي تحتوي على رأس لضلعين متجاورين ، زاويتان لرباعي الأضلاع تكونان متجاورتين إذا اشتركا بضلع ، الزاويتان غير متجاورتين تكونان متقابلتين .

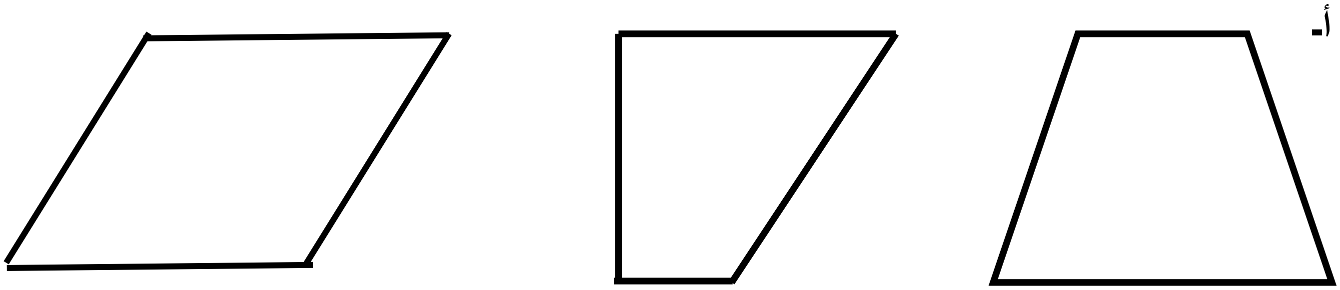
رأسي الزاويتين المتجاورتين يدعيان رأسين متجاورين ، الرأسين الغير متجاورين يدعيان راسين متقابلين .

القطعة الواصلة بين رأسين متقابلين تدعى القطر

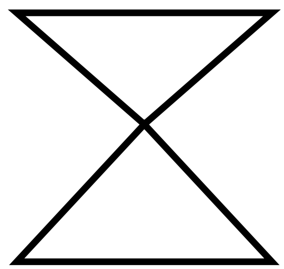
تعريف : إذا لم يتقاطع ضلعان في رباعي أضلاع فانه يدعى بسيط

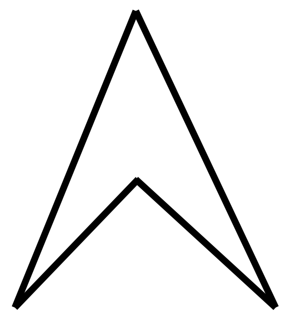
تعريف : إذا كان لأي رأسين متجاورين لرباعي إضلاع ، الرأسان اللذان لا يقعان على خط الضلع للرأسين المتجاورين يكونان في نفس الجهة من خط الضلع يدعى هذا رباعي أضلاع محدب .

أ-



ب-





*الأشكال في مجموعة (أ) هي أمثلة على رباعي أضلاع محدب بينما الأشكال في مجموعة (ب) هي أمثلة على رباعي أضلاع غير محدب .

تعريف : داخل رباعي الأضلاع المحدب هو تقاطع كل أنصاف المستوي المتعين من خطوط الأضلاع و التي تحتوي على الرؤوس التي لا تقع على خطوط الأضلاع أي انه داخل رباعي الأضلاع المحدب ABCD هو تقاطع :

1- نصف المستوي المتعين من AC الذي يحتوي D, B .
2- نصف المستوي المتعين من AB الذي يحتوي C , D .
3- نصف المستوي المتعين من BD الذي يحتوي A , C .
4- نصف المستوي المتعين من CD الذي يحتوي A , B .

مبرهنة 48/ داخل رباعي الأضلاع المحدب يكون مجموعة محدبة .

مبرهنة 49/ يقطع قطرا رباعي الأضلاع المحدب احدهما الآخر .

ألتطابق و ألمقارنة

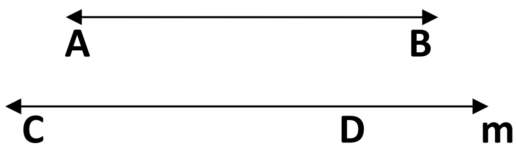
التطابق : هو علاقة أولية تقنية ، فيقال إن شكلاً ما يطابق شكل آخر ويرمز له بالرمز $\cong$

فمثلاً A-B تطابق C-D ، يرمز لها $A\text{-}B \cong C\text{-}D$

بديهيات التطابق والمقارنة

[A11] (بديهية إنشاء قطعة) :

لتكن A-B قطعة و C نقطة على الخط m فانه على كل شعاع على m نقطة بدايته C توجد نقطة واحدة فقط D بحيث إن C-D $\cong$ A-B .



[A12] : تطابق القطع علاقة تكافؤ (كل قطعة تطابق نفسها) أذا كانت قطعة واحدة تطابق قطعة ثانية فان القطعة الثانية تطابق الاولى ، و اذا كانت قطعة اولى تطابق قطعة ثانية و القطعة الثانية تطابق قطعة ثالثة فان القطعة الاولى تطابق القطعة الثالثة

[A13] (بديهية جمع القطع) :

إذا كان :

أ - A-B-C

ب - D-E-F

جـ - D-E $\cong$ A-B

د- E-F $\cong$ B-C

فان : D-F $\cong$ A-C

مبرهنة50/ (طرح القطع) أذا كان

1- $A\text{-}B\text{-}C$

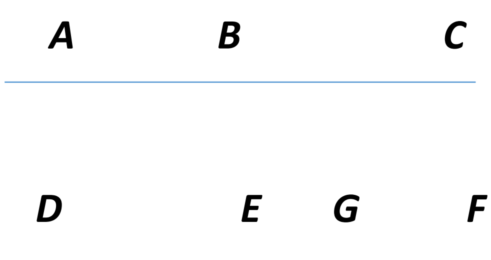
2- $D\text{-}E\text{-}F$

3- $A\text{-}C \cong D\text{-}F$

4- $A\text{-}B \cong D\text{-}E$

فان $B\text{-}C \cong E\text{-}F$

البرهان/ نفرض إن $B\text{-}C \ncong E\text{-}F$



:. توجد نقطة مثل G بحيث إن $D\text{-}E\text{-}G$

و $B\text{-}C \cong E\text{-}G$ (بديهية$A11$)

:: $B\text{-}C \ncong E\text{-}F$

:. $E\text{-}G \ncong E\text{-}F$ $[A12]$ $\Leftarrow$ $F \neq G$

:: 1- $A\text{-}B\text{-}C$

2- $D\text{-}E\text{-}G$

3- $A\text{-}B \cong D\text{-}E$

4- $B\text{-}C \cong E\text{-}G$

$\Leftarrow$ $A\text{-}C \cong D\text{-}G$ $(A13)$ ولكن $A\text{-}C \cong D\text{-}F$

:. $D\text{-}G \cong D\text{-}F$ $[A12]$ $\Leftarrow$ $F = G$

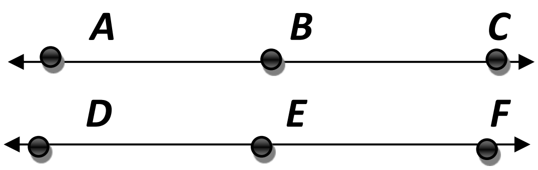
ولكن هذا تناقض

:. $B\text{-}C \cong E\text{-}F$

مبرهنة51 / إذا كانت $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ و B نقطة بحيث إن $A\text{-}B\text{-}C$ فأنه توجد نقطة مثل E بحيث إن $D\text{-}E\text{-}F$ و $A\text{-}B \cong D\text{-}E$.

البرهان : بما إن D تقع على المستقيم DF

$\therefore$ توجد نقطة مثل E على الشعاع DF بحيث إن $D\text{-}E\text{-}F$ و القطعة $A\text{-}B \cong D\text{-}E$ [A11]



مقارنة ألقطع

تعريف : القطعة $A\text{-}B$ تكون أصغر من $C\text{-}D$ إذا و فقط إذا توجد نقطة مثل E بحيث ان

$C\text{-}E\text{-}D$ و $A\text{-}B \cong C\text{-}E$.

رمز : يرمز للعبارة ($A\text{-}B$ أصغر من $C\text{-}D$) بالرمز $A\text{-}B < C\text{-}D$

مبرهنة 52/ إذا كانت $A\text{-}B , C\text{-}D$ أي قطعتين فانه تتحقق واحدة فقط مما يلي :

$A\text{-}B \cong C\text{-}D$ او $A\text{-}B < C\text{-}D$ او $C\text{-}D < A\text{-}B$

البرهان / $\because$ C تقع على المستقيم CD

$\therefore$ توجد نقطة مثل E على الشعاع $\overrightarrow{CD}$ بحيث إن $A\text{-}B \cong C\text{-}E$ [A11]

إذا كانت $E = D$ $\Leftarrow$ $A\text{-}B \cong C\text{-}D$

إذا كانت $E \neq D$ $\Leftarrow$ $\therefore$ C , E , D ثلاث نقاط مختلفة و على مستقيم واحد .

$\therefore$ من [A7] تتحقق واحدة فقط مما يلي

$C\text{-}D\text{-}E \lor C\text{-}E\text{-}D \lor E\text{-}C\text{-}D$

احتمال $E\text{-}C\text{-}D$ لا يتحقق [$E \in \overrightarrow{CD}$]

عندما $C\text{-}E\text{-}D$ و بما إن $A\text{-}B \cong C\text{-}E$ $\Leftarrow$ $A\text{-}B < C\text{-}D$ (التعريف)

عندما $C\text{-}D\text{-}E$ و بما إن $C\text{-}E \cong A\text{-}B$

∴ توجد نقطة مثل F على $A\text{-}B$ بحيث إن $A\text{-}F\text{-}B$ و∵ $C\text{-}D \cong A\text{-}F$ [مبرهنة 51] .

∴ $A\text{-}B > C\text{-}D$ [التعريف]

مبرهنة 53/

إذا كانت القطعة $A\text{-}B < C\text{-}D$ و $A\text{-}B \cong E\text{-}F$ فان $E\text{-}F < C\text{-}D$

البرهان /

$\because A\text{-}B < C\text{-}D$

$\therefore$ توجد نقطة مثل G بحيث $C\text{-}G\text{-}D$ و القطعة $A\text{-}B \cong C\text{-}G$ [التعريف السابق]

$\because A\text{-}B \cong E\text{-}F$

$\therefore$ القطعة $C\text{-}G \cong E\text{-}F$ [A12]

$\therefore$ القطعة $C\text{-}D > E\text{-}F$ [التعريف السابق]

مبرهنة 54/ إذا كان $A\text{-}B < C\text{-}D$ و $C\text{-}D \cong E\text{-}F$ فان $A\text{-}B < E\text{-}F$

البرهان :

$\because A\text{-}B < C\text{-}D$

$\therefore$ توجد نقطة مثل G بحيث إن الترتيب $C\text{-}G\text{-}D$ والقطعة $A\text{-}B \cong C\text{-}G$ [التعريف السابق]

$\because C\text{-}D \cong E\text{-}F$ و $C\text{-}G\text{-}D$

$\therefore$ توجد نقطة مثل H بحيث إن $E\text{-}H\text{-}F$ و $C\text{-}G \cong E\text{-}H$ [مبرهنة 51]

$\because A\text{-}B \cong C\text{-}G$

$\therefore A\text{-}B \cong E\text{-}H$ [A12]

$\therefore A\text{-}B < E\text{-}F$ [التعريف السابق]

مبرهنة 55 / إذا كانت $A\text{-}B < C\text{-}D$ و $C\text{-}D < E\text{-}F$ فان $A\text{-}B < E\text{-}F$

البرهان/ $\because A\text{-}B < C\text{-}D$

∴ توجد نقطة مثل G بحيث إن C-G-D و C-G ≅ A-B [من التعريف]

∵ C-D < E-F

∴ توجد نقطة مثل H بحيث إن الترتيب E-H-F وE-H ≅ C-D [من التعريف السابق]

∴ A-B < E-H [مبرهنة 54]

∴توجد نقطة مثل I بحيث إن E-I-H و E-I ≅ A-B [من التعريف]

∵ E-H-F ^ E-I-H

∴ E-I-H-F [مبرهنة 4]

∴ E-I-F و ∵ E-I ≅ A-B

∴ A-B < E-F

(تطابق الزوايا و المثلثات)

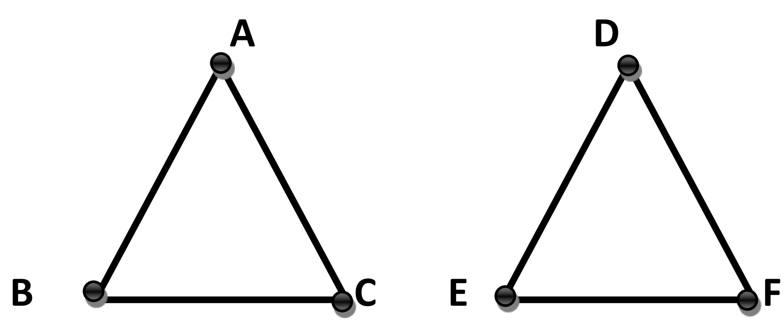
[A14]: بديهية إنشاء زاوية

لتكن BAC زاوية و $\overrightarrow{DE}$ شعاع على الخط m فانه في كل جهة من m يوجد شعاع واحد فقط مثل $\overrightarrow{DF}$ بحيث إن الزاوية ≺ BAC ≅ ≺ EDF.

[A15] : تطابق الزوايا هو علاقة تكافؤ .

[A16] : في المثلثين Δ ABC, Δ DEF إذا كان D-E ≅ A-B و D-F ≅ A-C و

A ≺ ≅ D ≺ فان B ≺ E ≺ و F≺ ≅ C ≺.



رمز : بالرمز Δ ABC ــ Δ DEF نعني التناظر التالي :

الاضلاع	الزوايا	الرؤوس
$A\text{-}B \longleftrightarrow D\text{-}E$	$\prec A \longleftrightarrow \prec D$	$A \leftrightarrow D$
$B\text{-}C \longleftrightarrow E\text{-}F$	$\prec B \longleftrightarrow \prec E$	$B \leftrightarrow E$
$A\text{-}C \longleftrightarrow D\text{-}F$	$\prec C \longleftrightarrow \prec F$	$C \leftrightarrow F$

تعريف : ليكن DEF , ABC مثلثين ، إذا وجد على الأقل تناظر واحد Δ ABC- Δ XYZ

حيث X,Y,Z هي D,E,F .

بحيث إن

$X\text{-}Y \cong A\text{-}B$ $\quad$ $\prec X \cong \prec A$

$Y\text{-}Z \cong B\text{-}C$ $\quad$ $\prec Y \cong \prec B$

$X\text{-}Z \cong A\text{-}C$ $\quad$ $\prec Z \cong \prec C$

فان هذا التناظر يدعى تناظر متطابق و يقال عن المثلثين متطابقين

رمز : إذا كان Δ ABC ــ Δ DEF هذا التناظر متطابق للمثلثين DEF ,ABC

فانه يرمز له بالرمز $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

مبرهنة 56 / (SAS) :

إذا كان ضلعان و الزاوية المحددة بينهما في مثلث تطابق الضلعين و الزاوية المحددة بينهما في مثلث آخر فان المثلثين متطابقين بعبارة أخرى إذا كان المثلثين DEF , ABC

A-B ≅ D-E

A-C ≅ D-F

$\prec$ A ≅ $\prec$ D فان ΔABC ≅ ΔDEF

البرهان / ∴ $\prec$ E ≅ $\prec$ B و $\prec$ F ≅ $\prec$ C [A16]

يجب إن نبرهن إن E-F ≅ B-C نفرض إن العبارة خاطئة

∴ أما B-C < E-F و E-F < B-C [مبرهنة 52]

عندما B-C < E-F

∴ توجد نقطة مثل G بحيث إن E-G-F , B-C ≅ E-G [من تعريف قطعة اصغر من قطعة]

∴ E,G,F نقاط مختلفة و على مستقيم واحد [A6]

أي إن G , F تقعان على المستقيم EF

∴G , F في نفس الجهة من DE [مبرهنة (28) فرع 6] ,

في المثلثين ABC , DEG فيهما

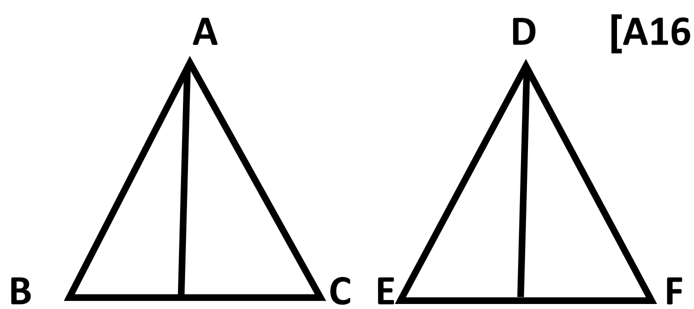
E $\prec$ ≅ B $\prec$, D-E ≅ A-B , E-G ≅ B-C

∴ $\prec$ BAC ≅ $\prec$ EDG [A16]

و لكن $\prec$ EDF ≅ $\prec$ BAC

∴$\prec$ EDF ≅ $\prec$ EDG [A15]

∴ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$ [A14]



أي إن F, G ينتمون إلى $\overrightarrow{DF}$ وهذا يناقض [المبرهنة 2]

:. $B\text{-}C < EF$ غير متحققة وبنفس الطريقة للاحتمال الثاني

:. $ABC \cong DEF$, $B\text{-}C \cong E\text{-}F$

تعريف : زاويتان لهما ضلع مشترك و ضلعيهما الآخرين يكونان شعاعين متعاكسين يقال عنهما يكونان زوجاً خطياً .

تعريف : زاويتان تطابقان على التوالي زاويتين لزوج خطي يقال عنهما متكاملتين ، إحداهما مكملة للأخرى .

مبرهنة 57/

إذا كانت زاويتان تكونان زوجاً خطياً فأنهما متكاملتان .

مبرهنة 58/

إذا كانت زاويتان متطابقتان فانه تتطابق كذلك الزاويتان اللتان تكونان معهما على التوالي زوجين خطيين .

البرهان / لتكن الزاوية DEF تطابق الزاوية ABC

:. توجد نقطة مثل H بحيث إن $A\text{-}B\text{-}H$ و توجد نقطة مثل G بحيث إن $D\text{-}E\text{-}G$ [A9]

:. الشعاع $\overrightarrow{BA}$ و الشعاع $\overrightarrow{BH}$ متعاكسين و كذلك الشعاعين $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EG}$ متعاكسين .

و تكون الزاويتان $\prec ABC$ و $\prec CBH$ تكونان زوجاً خطياً

و الزاويتان $\prec DEF$ و $\prec FEG$ تكونان زوجاً خطياً

يجب ان نبرهن بان $\prec FEG \cong \prec CBH$

لتكن النقاط F, G, D مختارة بطريقة بحيث إن :

$A\text{-}B \cong D\text{-}E$

$B\text{-}C \cong E\text{-}F$

$B\text{-}H \cong E\text{-}G$

في المثلثين Δ ABC و Δ DEF فيهما

$\prec DEF \cong \prec ABC \quad , \; B\text{-}C \cong E\text{-}F \; , \; A\text{-}B \cong D\text{-}E$

$\therefore$ القطعة $A\text{-}C \cong D\text{-}F$ و $\prec EDF \cong \prec BAC$ [مبرهنة (56) (SAS)]

$\therefore$ $D\text{-}G \cong A\text{-}H$ [A13]

$\therefore$ $\Delta FDG \cong \Delta CAH$ (مبرهنة 56) ومن التطابق نحصل على ان

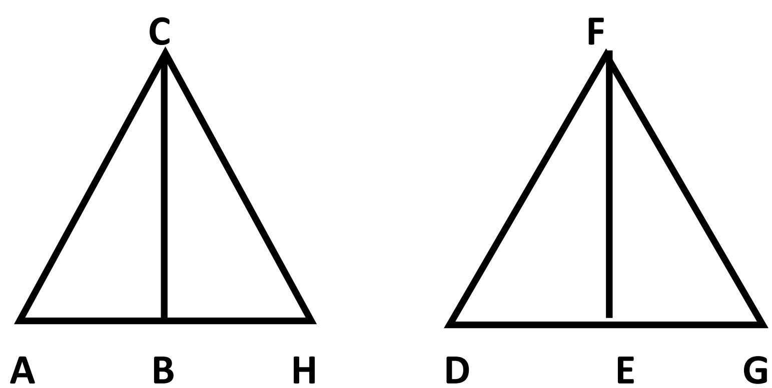
$C\text{-}H \cong F\text{-}G$

$\prec CHA \cong \prec FGD$

في المثلثين CBH و FEG فيهما

$C\text{-}H \cong F\text{-}G \; , \; B\text{-}H \cong E\text{-}G \; , \quad \prec BHC \cong \prec EGF$

$\therefore$ $\prec CBH \cong \prec FEG$ [A16]



نتيجة 1 / مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة .

تعريف : يقال عن زاويتين لهما رأس مشترك إنهما زاويتان رأسيتان إذا و فقط إذا

شعاعين زاوية واحدةهما الشعاعين المعاكسين لشعاعي الزاوية الأخرى .

نتيجة 2 / تكون الزاويتان الرأسيتين متطابقتين .

تعريف : زاويتان لهما رأس مشترك و ضلع مشترك و ضلعيهما الآخرين في الجهتين المتعاكستين لخط الضلع المشترك تدعيان زاويتان متجاورتين .

نتيجة 3/ إذا كانت زاويتان متكاملتين و متجاورتين فأنهما تكونان زوجاً خطياً .

البرهان / لتكن BAC ∢ و CAD ∢ زاويتان متكاملتان و إن B,D في جهتين متعاكستين من الخط AC (يجب إن نبرهن $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ شعاعين متعاكسين وبالتالي فان الزاويتين BAC ∢ و CAD ∢تكونان زوجاً خطياً)

ليكن $\overrightarrow{AE}$ هو الشعاع المعاكس $\overrightarrow{AB}$

∴ D , E في نفس الجهة من الخط AC [مبرهنة (27) فرع 1]

∵الشعاع $\overrightarrow{AE}$ هو الشعاع المعاكس للشعاع $\overrightarrow{AB}$

∴ الزاويتان BAC ∢ و CAE ∢ تكونان زوجاً خطياً

∴ الزاويتان BAC ∢ و CAE ∢ متكاملتين [مبرهنة 57]

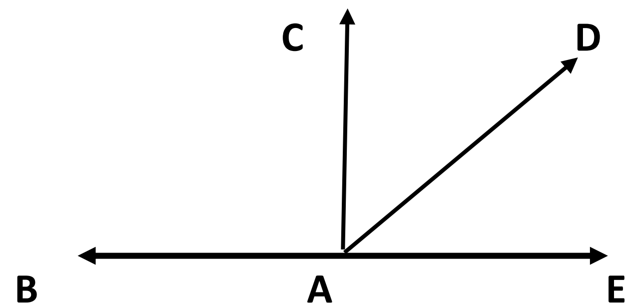
∵ BAC ∢ , CAD ∢ متكاملتين

∵ BAC∢ ≅ BAC ∢ [A15]

∴ CAE ∢ ≅ CAD ∢ [نتيجة (1)]

∴ الشعاع $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ [A14]

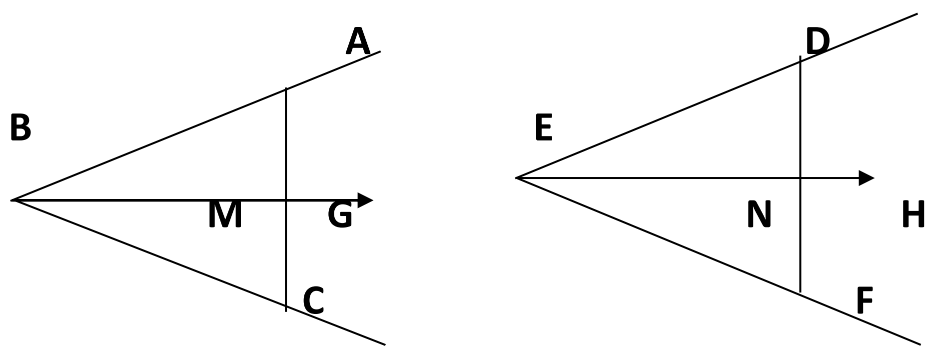
∴ $\overrightarrow{AD}$ هو الشعاع المعاكس إلى $\overrightarrow{AB}$ و إن الزاويتان BAC∢ , CAD ∢ تكونان زوجاً خطياً.



مبرهنة 59 /

إذا كان DEF ≺ ≅ ABC ≺ وان الشعاع BG في داخل الزاوية ABC فأنه يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{EH}$ في داخل DEF ≺ بحيث إن DEH ≺ ≅ABG ≺ و HEF≺ ≅ GBC ≺

البرهان /



من [A11] نختار النقاط D,F بحيث إن A-B ≅ D-E و C-B ≅ F-E

:. المثلث ABC ≅ المثلث DEF [المبرهنة SAS] ومن التطابق نحصل

D-F ≅ A-C و BCA ≺ ≅ EFD ≺ و BAC ≺ ≅ EDF ≺

بما إن الشعاع BG يقطع A-C في نقطة ولتكن M (مبرهنة 43)

بما إن A-M-C و D-F ≅ A-C

:. توجد نقطة مثل N بحيث إن : D-N-F و A-M ≅ D-N (مبرهنة 51)

:. الشعاع EN هو الشعاع المطلوب الذي يقع في داخل الزاوية DEF ≺ (مبرهنة 45 و تعريف شعاع بين شعاعين)

∵ A-C ≅ D-F و A-M ≅ D-N و A-M-C و D-N-F

$\therefore$ M-C $\cong$ N-F (مبرهنة 50)

في المثلثين ABM Δ و DEN Δفيهما

$\prec$ BAC = $\prec$ BAM $\cong$ $\prec$ EDF = $\prec$ EDN

$\therefore$ $\prec$ BAM $\cong$ $\prec$ EDN و A-M $\cong$ D-N و A-B $\cong$ D-E

$\therefore$ Δ ABM $\cong$ Δ DEN [SAS] ومن التطابق

$\prec$ DEN $\cong$ $\prec$ ABM

وبنفس الطريقة فان المثلثين NEF Δو MBC Δ يتطابقان

ولذلك فان $\prec$ NEF $\cong$ $\prec$ MBC

بما إن : $\prec$ ABG = $\prec$ ABM $\cong$ $\prec$ DEN = $\prec$ DEH

$\therefore$ $\prec$ ABG $\cong$ $\prec$ DEH

بما إن : $\prec$ GBC = $\prec$ MBC $\cong$ $\prec$ NEF = $\prec$ HEF

$\therefore$ $\prec$ GBC $\cong$ $\prec$ HEF

مبرهنة 60/ (جمع الزوايا)

لتكن $\prec ABC$ و $\prec DEF$ زاويتين لهما على التوالي شعاعين $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{EH}$ يقعان في داخليهما

$\prec ABG \cong \prec DEH$

$\prec GBC \cong \prec HEF$

فان $\prec ABC \cong \prec DEF$

البرهان/ يوجد شعاع $\overrightarrow{BM}$ في جهة الخط BC التي تحتوي A بحيث إن

$[A14]\ \prec MBC \cong \prec DEF$

$\because$ **EH يقع في داخل** $\prec DEF$

$\therefore$ **يوجد شعاع مثل BN في داخل** $\prec MBC$

بحيث إن : $\prec NBC \cong \prec HEF$ **و** $\prec MBN \cong \prec DEH$ **(مبرهنة 59)**

ولكن $\prec GBC \cong \prec HEF$

$\therefore \prec GBC \cong \prec NBC\ [A15]$

$\therefore$ **الشعاعين** $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BN}$ **(A14)**

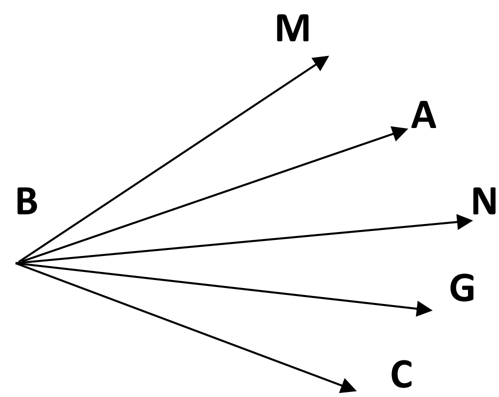
$\therefore$ **الزاوية** $\prec MBG = \prec MBN \cong \prec DEH \cong \prec ABG$

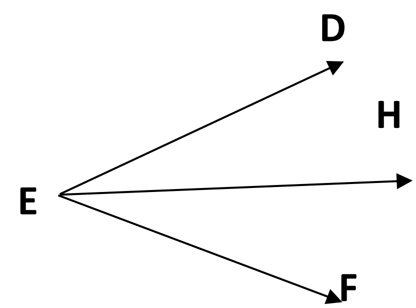
$\therefore \prec MBG \cong \prec ABG\ (A15)$

$\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}\ (A14)$

$\therefore \prec ABC = \prec MBC \cong \prec DEF$

$\therefore \prec ABC \cong \prec DEF$





مبرهنة 61/ (طرح الزوايا) :

إذا كان ≺ GFH ≅ ≺ CBD و ≺ HFE ≅ ≺ DBA وان الشعاعين BA , FE يقعان في داخل ≺ GFH , ≺ CBD على التوالي فان ≺ EFG ≅ ≺ ABC

البرهان / ∵ ≺ GFH ≅ ≺ CBD

و إن الشعاع $\overrightarrow{FE}$ في داخل الزاوية ≺ GFH

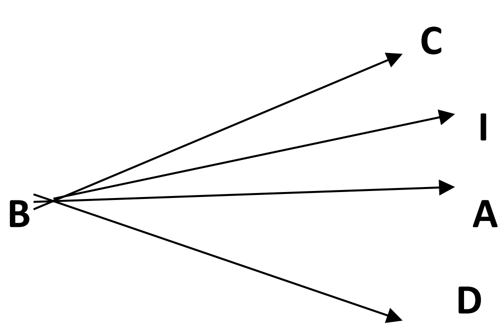
∴ يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{BI}$ في داخل ≺CBD بحيث إن

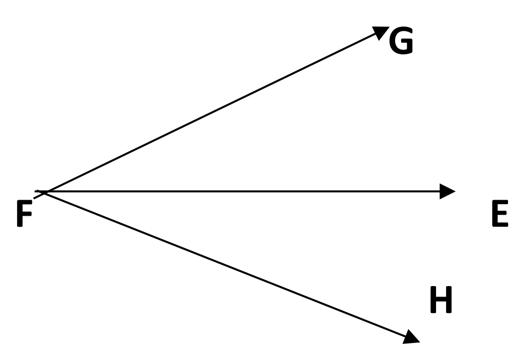
≺ DBI ≅ ≺ HFE و EFG ≅ IBC [مبرهنة(59)]

ولكن ≺ DBA ≅ ≺ HFE

∴ ≺DBA ≅ ≺ DBI [A15]

∴ الشعاع $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI}$ [A14] ∴ ≺ ABC ≅ ≺ EFG





(مقارنة الزوايا)

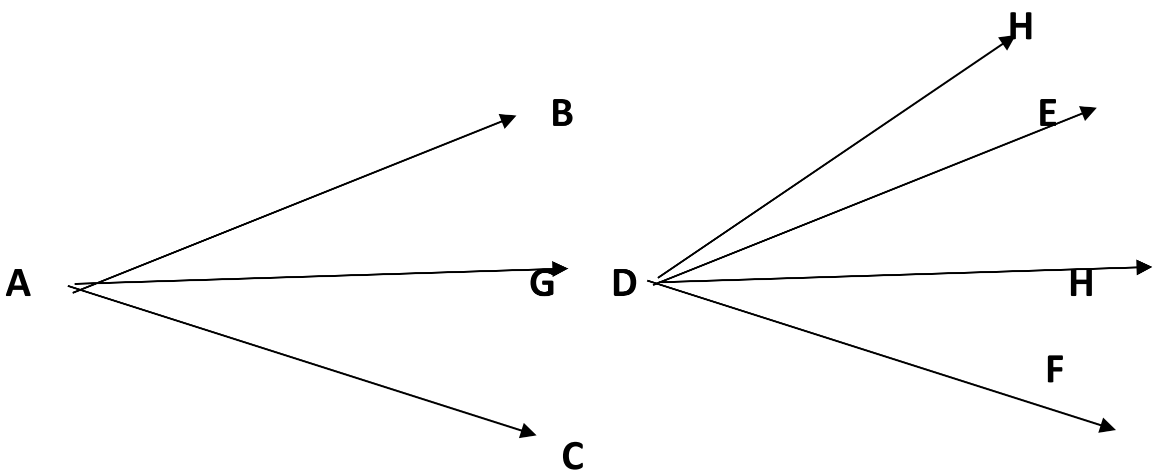
تعريف : تكون زاوية مثل ABC ≺ اصغر من زاوية مثل DEF ≺إذا وفقط إذا يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{EH}$ في داخل الزاوية DEF ≺ بحيث إن الزاوية ABC ≺ ≅ HEF ≺ ويرمز لها بالرمز

≺ ABC < ≺ DEF

مبرهنة 62/

لأي زوج من الزوايا و ليكن D ≺ , A ≺ فانه تتحقق واحدة مما يلي :

≺ A ≅ ≺D ∨ ≺ A < ≺ D ∨ ≺ D < ≺ A



البرهان : لتكن A ≺ ≅ BAC ≺ و D ≺ ≅ EDF ≺

:. المستقيم DF يوجد شعاع واحد فقط مثل $\overrightarrow{DH}$ يقع في جهة النقطة E (جهة DF التي تحتوي E)

بحيث إن : BAC ≺ ≅ HDF ≺ [A14]

إذا كان الشعاع $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DH}$

فان BAC ≺ ≅ EDF ≺

أي إن : $\angle A \cong \angle D$

إذا كان $\overrightarrow{DE} \neq \overrightarrow{DH}$

:. أما الشعاع $\overrightarrow{DH}$ يقع في داخل الزاوية $\angle EDF$ أو في خارجها .

إذا كان الشعاع $\overrightarrow{DH}$ يقع في داخل الزاوية $\angle EDF$ وبما إن $\angle BAC \cong \angle HDF$

:. $\angle EDF < \angle BAC$ [من التعريف السابق]

أي إن $\angle D < \angle A$

إذا كان الشعاع $\overrightarrow{DH}$ يقع في خارج الزاوية $\angle EDF$

:. أما الشعاع $\overrightarrow{DH}$ يقع في جهة DF التي لا تحتوي E هذا الحالة غير متحققة[A14]

عندما الشعاع $\overrightarrow{DH}$ يقع في جهة DF التي تحتوي E

بما إن : $\angle BAC \cong \angle HDF$

:. يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{AG}$ يقع داخل الزاوية $\angle BAC$

بحيث إن $\angle GAC \cong \angle DEF$ (مبرهنة 59)

:. الزاوية $\angle EDF$ اصغر من الزاوية $\angle BAC$ [من التعريف السابق]

إي إن $\angle A < \angle D$

مبرهنة 63/ إذا كان $\angle B < \angle A$, $\angle C \cong \angle A$ فان $\angle B < \angle C$

البرهان :

لتكن $\angle B = \angle DBH$

بما إن : $\angle B < \angle A$

:. يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{BF}$ في داخل الزاوية $\angle B$

بحيث إن $\prec A \cong \prec FBH$ [من التعريف السابق]

ولكن $\prec A \cong \prec C$ ،

$\therefore$ $\prec C \cong \prec FBH$ [A15]

$\therefore$ $\prec C < \prec B$ [من التعريف السابق]

....

مبرهنة 64/ إذا كان ≺ A < ≺ B و ≺ C ≅ ≺ B فان ≺ A < ≺ C

البرهان /

لتكن ≺ B هي ≺ DBH و ≺ C هي ≺ ECH

بما إن : ≺ A < ≺ B

يوجد شعاع $\overrightarrow{BF}$ داخل الزاوية ≺ DBE

بحيث إن ≺ FBE ≅ ≺ A [من التعريف السابق]

و بما إن : ≺ C ≅ ≺ B

:. يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{CI}$ في داخل الزاوية ≺ ECH

بحيث إن ≺ FBH ≅ ≺ ICH [مبرهنة 59]

و بما إن : ≺ FBH ≅ ≺ A

:. ≺ ICH ≅ ≺ A [A15]

:. ≺ C < ≺ A [من التعريف السابق]

مبرهنة 65/ إذا كان ≺ A < ≺ B و ≺ B < ≺ C فان ≺ A < ≺ C.

البرهان /

لتكن ≺ B هي ≺ DBE و ≺ C هي ≺ ECH

بما إن : ≺ A < ≺ B :. يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{BF}$ في داخل الزاوية ≺ DBE بحيث إن

A ≺ ≅ ≺ FBH [من التعريف السابق] و بما إن ≺ B < ≺ C

:. يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{CI}$ في داخل الزاوية ECH بحيث إن ≺ B ≅ ≺ ICH

[التعريف السابق]

:. يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{CJ}$ في داخل الزاوية ≺ ICH بحيث إن ≺ FBE ≅ ≺ JCH [مبرهن(59)]

بما إن : ≺ FBH ≅ ≺ A :. ≺ JCH ≅ ≺A [A15]

بما إن الشعاع $\overrightarrow{CI}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CE}$ [من تعريف شعاع بين الشعاعين]

و بما إن : $\overrightarrow{CJ}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CI}$ [من تعريف شعاع بين الشعاعين]

:. الشعاع $\overrightarrow{CJ}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CE}$ [مبرهنة (46)(أ)] :. الشعاع $\overrightarrow{CJ}$ في داخل الزاوية $\prec C$ [من تعريف شعاع بين شعاعين]

$\because \prec JCH \cong \prec A$

:. $\prec C > \prec A$ [من تعريف السابق]

(إعادة براهين مبرهنات إقليدس)

مبرهنة 66/

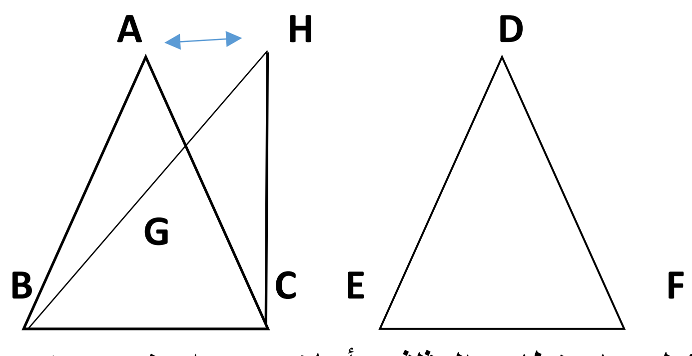
في المثلث ABC إذا كان $A\text{-}C \cong A\text{-}B$

و F,G نقطتان بحيث إن $A\text{-}B\text{-}F$, $A\text{-}C\text{-}G$

فان $\prec ACB \cong \prec ABC$ و $\prec CBF \cong \prec BCG$

مبرهنة 67/ [SSS]

إذا كانت ثلاث أضلاع من مثلث تطابق على التوالي ثلاثة أضلاع من مثلث آخر فان المثلثين متطابقان .



البرهان :

ليكن ABC و DEF مثلثين فيهما :

$D\text{-}E \cong A\text{-}B$, $D\text{-}F \cong A\text{-}C$

$E\text{-}F \cong B\text{-}C$ و باستخدام مبرهنة (SAS) لبرهان تطابق المثلثين أعلاه يجب إن نبرهن زوجاً واحداً من الزوايا متطابقة ولتكن $\prec DEF \cong \prec ABC$

نفرض إن العبارة خاطئة

:. أما $\prec DEF < \prec ABC$ أو $\prec ABC < \prec DEF$ [مبرهنة (62)]

نفرض $\prec ABC < \prec DEF$

:. يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{BG}$ داخل الزاوية $\prec ABC$ بحيث إن $\prec GBC \cong \prec DEF$ [من تعريف زاوية اصغر من زاوية]

:. توجد نقطة مثل H على الشعاع $\overrightarrow{BG}$ بحيث إن $B\text{-}H \cong D\text{-}E$ [A11]

و بما إن : $B\text{-}C \cong E\text{-}F$

:. $\Delta\ DEF \cong \Delta\ HBC$ [SAS]

و من التطابق : $D\text{-}F \cong H\text{-}C$

بما إن : $A\text{-}C \cong D\text{-}F$:. $A\text{-}C \cong H\text{-}C$ [A12]

و بالمثل $A\text{-}B \cong H\text{-}B$ ، و بما إن A , H بنفس الجهة من BC

:. A = H [A11]

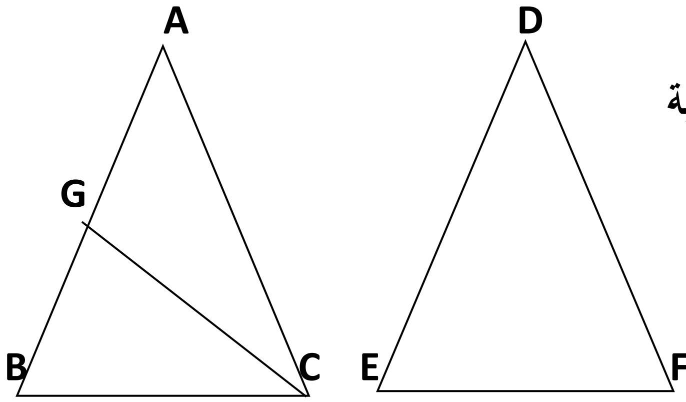
:. $\prec DEF \cong \prec ABC$ وهذا تناقض

و بنفس الطريقة إذا كانت $\prec DEF < \prec ABC$

:. $\prec DEF \cong \prec ABC$ و إن المثلثين ABC , DEF متطابقان [SAS]

مبرهنة 68 / [ASA]

إذا كانت زاويتان وضلع مشترك بينهما في مثلث تطابق على التوالي زاويتان و ضلع مشترك بينهما في مثلث آخر فان المثلثين متطابقان .



البرهان :

ليكن ABC و DEF مثلثان فيهما الزاوية

$\prec ACB \cong \prec DFE$ و

$\prec ABC \cong \prec DEF$ و

$B\text{-}C \cong E\text{-}F$

المطلوب هو $\Delta\ ABC$, $\Delta\ DEF$ متطابقان

وباستخدام مبرهنة SAS يجب ان نبرهن بان $D\text{-}E \cong A\text{-}B$

نفرض العبارة خاطئة اي إن A-B لا تطابق D-E

:. أما $D\text{-}E < A\text{-}B$ أو $A\text{-}B < D\text{-}E$ [مبرهنة (52)]

عندما $D\text{-}E < A\text{-}B$

:. توجد نقطة مثل G حيث إن $A\text{-}G\text{-}B$ و $D\text{-}E \cong B\text{-}G$

[من تعريف قطعة اصغر من قطعة]

وبما إن : $E\text{-}F \cong B\text{-}C$ و $\prec GBC \cong \prec DEF$

:. $\Delta\, GBC \cong \Delta\, DEF$ [مبرهنة SAS]

و من التطابق $\prec GCB \cong \prec DFE$ ولكن $\prec DFE \cong \prec ACB$

$\prec GCB \cong \prec ACB$ [A15]

و بما إن توجد نقطة A على الشعاع $\overrightarrow{CA}$ ونقطة B على الشعاع $\overrightarrow{CB}$ ونقطة G على الشعاع $\overrightarrow{CG}$ و الترتيب هو $A\text{-}G\text{-}B$

:. الشعاع $\overrightarrow{CG}$ بين الشعاعين $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ [مبرهنة (45)]

:. الشعاع $\overrightarrow{CG}$ في داخل الزاوية ACB [من تعريف شعاع بين شعاعين]

الآن بما إن يوجد شعاع مثل $\overrightarrow{CG}$ في داخل الزاوية $\prec ACB$ و $\prec ACB > \prec GCB$ [A15]

$\prec ACB > \prec GCB$ [من تعريف زاوية اصغر من زاوية]

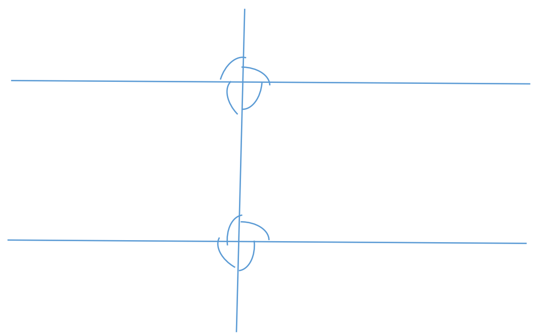
و هذا تناقض مع [مبرهنة (62)]

وبنفس الطريقة إذا كانت $D\text{-}E < A\text{-}B$

:. $D\text{-}E \cong A\text{-}B$

و $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$ [مبرهنة (SAS)]

تعريف/ اذا قطع مستقيمين بقاطع في نقطتين مختلفتين A,B فالزوايا التي تكون القطعة A-B كجزء من ضلع تدعى زوايا داخليه وتدعى الزوايا الاخرى زوايا خارجيه,الزاويتان اللتان يكون راسيهما النقطتين A,B وفي نفس الجهه من القاطع احدهما داخلية والاخرى خارجية تدعيان زاويتان متناظرتان ,زاويتان غير متجاورتين على جهتي القاطع المتعاكستين وكل منهما داخلية تدعيان زاويتين داخليتين متبادلتين



مبرهنة 73/ اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتان فان المستقيمين لايتقاطعان

البرهان /

ليكن l,m مستقيمين وk مستقيم اخر يقطع l,m في النقطتين A,B على التوالي

لتكن C نقطة اخرى على l وD نقطة اخرى على m وE نقطة اخرى على k بحيث انE-A-B

∴ الزاويتان ∡ EAC و ∡ ABD متناظرتين ومتطابقتين

لتكن F نقطة على l بحيث ان F-A-C فتكون الزاويتان ∡ FAB و ∡ ABD متبادلتين

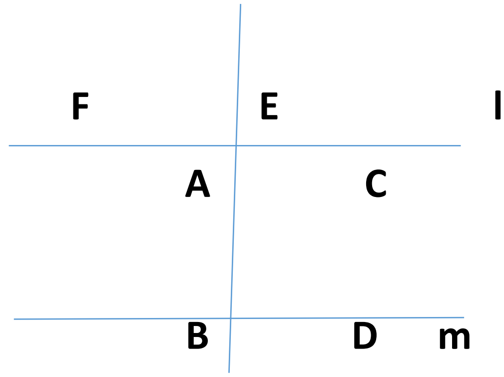
وان الزاويتان ∡ FAB و∡ EAC راسيتان

∵ ∡ ABD ≅ ∡ EAC

و∡ FAB ≅ ∡ EAC (نتيجه2 من مبرهنة 58)

∴ ∡ ABD ≅ ∡ FAB (A15)

∴ المستقيمين l,m لايتقاطعان (مبرهنة 72)(اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان الداخليتان المتبادلتان متطابقتان فان المستقيمين لايتقاطعان)



مبرهنة 74/ اذا قطع مستقيمين بقاطع وكانت الزاويتان الداخليتان في نفس الجهه من القاطع متكاملتين فان المستقيمين لايتقاطعان

البرهان/

ليكن l,m مستقيمين وk مستقيم اخر يقطع l,m في النقطتين A,B على التوالي

لتكن C نقطة اخرى على l وD نقطة اخرى على m

∴ ABD ∠و CAB ∠متكاملتين

لتكن E نقطة اخرى على k بحيث ان E-A-B اي ان الزاويتان CAB ∠ وEAC ∠ يكونان زوجا خطيا

∴ CAB ∠ و EAC ∠ متكاملتين (مبرهنة 57)

∵ABD ∠و CAB ∠متكاملتين و ∵ CAB ∠ ≅ CAB ∠ (A15)

∴ EAC ∠ ≅ ABD ∠ (نتيجة 1 مبرهنة 58)

اي ان الزوايا المتناظرة متطابقة

∴ المستقيمان m,l لايتقاطعان (مبرهنة 73)

تعريف / اذا كانت C نقطة بحيث ان A-C-B وC-B ≅A-C فانه تدعى C نقطة منتصف القطعه A-B .

تعريف/ اذا كانت C نقطة منتصف القطعة A-B فان كل من A-C وC-B تدعى نصف القطعة A-B

مبرهنة 80/ انصاف القطع المتطابقه تكون متطابقة

تعريف /لتكن AOB ∠ زاوية, يقال بان OD ينصف AOB ∠ اذا وفقط اذا كان

1) D تقع في داخل AOB ∠

2) $\prec AOD \cong \prec DOB$

تعريف/ اذا كانت OD منصف $\prec AOB$ فان $\prec DOB$ و $\prec AOD$ تدعيان نصفي $\prec AOB$

مبرهنة 83/ انصاف الزوايا المتطابقة تكون متطابقة

الزوايا القوائم والزوايا غير القوائم

تعريف/ الزاوية التي تطابق مكملتها تدعى زاوية قائمة, الزاوية التي تكون اصغر من زاوية قائمة تدعى زاوية حادة , اي زاوية هي ليست قائمة وليست حادة تدعى زاوية منفرجة

مبرهنة 84/ اي زاوية حادة تكون اصغر من اي زاوية منفرجة

البرهان/ لتكن $\prec ABC$ زاوية حادة , $\prec DEF$ زاوية منفرجة

يجب ان نبرهن بان $\prec ABC < \prec DEF$

نفرض ان العبارة خاطئة

$\therefore$ اما $\prec ABC \cong \prec DEF$ او $\prec DEF < \prec ABC$ (مبرهنة 62)

عندما $\prec ABC \cong \prec DEF$

$\therefore$ $\prec DEF$ زاوية حادة (من التعريف السابق ومبرهنة 64) وهذا خلاف الفرض

عندما $\prec DEF < \prec ABC$

$\because$ $\prec ABC$ زاوية حادة

$\therefore$ $\prec ABC$ تكون اصغر من زاوية قائمة (التعريف السابق)

$\therefore$ $\prec DEF$ تكون اصغر من زاوية قائمة (مبرهنة 65)

$\therefore$ $\prec DEF$ هي زاوية حادة (وهذا خلاف الفرض)

$\therefore$ $\prec ABC < \prec DEF$

مبرهنة 88/ كل الزوايا القوائم تكون متطابقة

البرهان/ لتكن $\prec DBA$ و $\prec DBC$ زاويتين متطابقتين وتكونان زوجا خطيا

ولتكن $\prec HFE$ و $\prec HFG$ زاويتين متطابقتين وتكونان زوجا خطيا

يجب ان نبرهن ان $\prec HFE \cong \prec DBA$

نفرض ان العبارة خاطئة

$\therefore$ اما $\prec DBA < \prec HFE$ او $\prec HFE < \prec DBA$ (مبرهنة 62)

عندما $\prec HFE < \prec DBA$

∴ يوجد شعاع $\overrightarrow{BI}$ يقع في داخل $\prec DBA$ بحيث ان

$\prec HFE \cong \prec ABI$ (من تعريف زاوية اصغر من زاوية)

∴ $\prec HFG \cong \prec IBC$ (نتيجة 1 من مبرهنة 58)

ولكن $\prec HFE \cong \prec HFG$

∴ $\prec ABI \cong \prec IBC$ (A15)

∵ $\prec DBA \cong \prec DBC$ ، BI يقع في داخل $\prec DBA$

∴ يوجد شعاع $\overrightarrow{BJ}$ يقع في داخل $\prec DBC$ بحيث ان $\prec JBC \cong \prec ABI$ (مبرهنة 59)

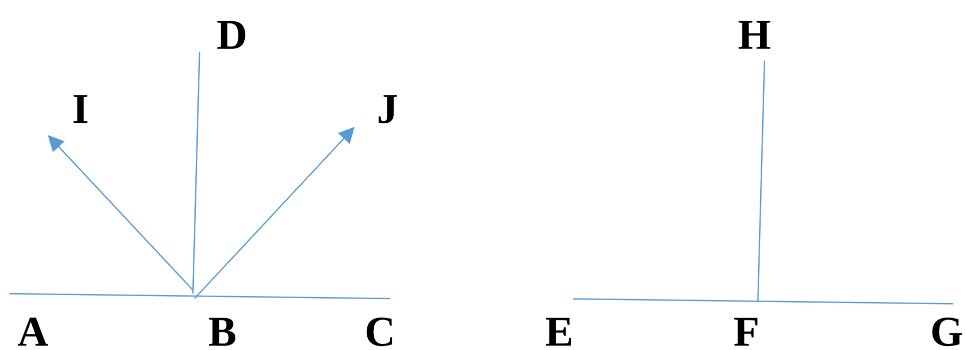
ولكن $\prec ABI \cong \prec IBC$

∴ $\prec JBC \cong \prec IBC$ (A15)

ولكن هذا يناقض A14

وبنفس الطريقة نصل الى تناقض عندما $\prec HFE < \prec DBA$

∴ $\prec HFE \cong \prec DBA$



تعريف/ شعاعان مختلفان يدعيان متعامدين اذا وفقط اذا كانت لهما نقطة بداية مشتركة وان الزاوية المتكونة من اتحادهما تكون زاوية قائمة . يستعمل هذا التعريف في حالة المستقيمات والقطع ايضا وفي حالة القطع يشترط ان يشتركا بنقطة او لهما نقطة نهاية مشتركة .

يرمز للشعاعين المتعامدين $\overrightarrow{OA}$ و$\overrightarrow{OB}$ بالرمز $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

ويستعمل كذلك الرمز لمايلي $OA \perp OB$ و $O\text{-}A \perp O\text{-}B$